TAMPEREEN YLIOPISTO

”Neljö” ja muita mutkia

Käsitteellistämisen varhainen vahvistaminen geometrian opetuksessa toisella luokalla

School of Education
Opettajankoulutuslaitos, Tampere
Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma
KARRI PENNANEN, JANNE RANTANEN
Kevät 2015

Tampereen yliopisto
School of Education
Opettajankoulutuslaitos, Tampere
KARRI PENNANEN, JANNE RANTANEN: ”Neljö” ja muita mutkia. Käsitteellistämisen varhainen vahvistaminen geometrian opetuksessa toisella luokalla.
Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma, 49 sivua, 19 liitesivua
Huhtikuu 2015

Tutkimus on kehittämistutkimuksellisella otteella toteutettu laadullinen tapaustutkimus, jonka tarkoituksena oli tuottaa geometrisen käsitejärjestelmän hallitsemista vahvistava oppimateriaali toiselle luokalle geometrian opetukseen, sekä samalla selvittää miten toisluokkalaiset oppivat totuttua haastavampia abstrakteja käsitteitä ja käsitejärjestelmää. Opetusjakso toteutettiin Hämeenlinnan Normaalikoulussa syventävinä projektiopintoina keväällä 2012. Jakson aikana oppilaille opetettiin geometrian peruskäsitteistön käsitejärjestelmä sisäisine suhteineen, mahdollisimman tarkkaa käsitteenmäärittelyä toteuttaen. Tutkimusaineistona toimii tutkijaopettajien havaintopäiväkirja opetusjakson ajalta, jakso- ja tuntisuunnitelmat, oppilaiden valmistamat geometrian kansiot, oppilaiden tekemät alku- ja loppukokeet, sekä täydentävät videohaastattelut. Tutkimuksessa tarkastellaan toisluokkalaisten muodostamaa käsitteellistä ymmärrystä sekä oppimateriaalin käyttökelpoisuutta tämän kerätyn empiirisen aineiston avulla.

Lähtökohtana tutkimukselle oli geometrian käsitteistön heikko hallinta ylemmillä luokilla sekä spiraaliperiaatteen mukaisen opetuksen soveltuvuuden kyseenalaistaminen tämän tyyppiseen sisältöön. Opetusmateriaalin runkona toimi Kalle Väisälän (1959) perusteos Geometria, jossa määritellään geometrisen käsitejärjestelmän suhteet seikkaperäisesti mutta selkeästi. Valitun peruskäsitteistön osalta teoreettinen osuus seuraa sanatarkasti Väisälää, jonka pohjalta tutkijaopettajat ovat luoneet toisluokkalaisten oppimista tukemaan pyrkivän materiaalin. Väisälän mallin mukaisesti oppisisällössä aloitetaan pienimmästä mahdollisesta yksiköstä ja rakennettaan järjestelmää lisäämällä määritelmiä portaittain. Käytännössä toisluokkalaisille opetettiin kaksiulotteisen geometrian peruskäsitteet ympyrään ja ympyrän osiin asti. Elliptisiä muotoja tai käyriä ei opiskeltu syvemmin johtuen näiden määritelmien laskennallisesta luonteesta. Minkäänlaisia lukuarvoja saavia käsitteitä ei pyritty opettamaan, eli numeeriset menetelmät jätettiin materiaalin ulkopuolelle.

Tutkimuksen perusteella huomattavasti opetussuunnitelman sisältöä haastavamman teoreettisen aineksen opettaminen jo toisluokkalaisille on tuloksellista. Tutkimustulokset kertovat kuitenkin myös, että tiettyjen abstraktien sisältöjen oppiminen on toisluokkalaiselle huomattavan haastavaa, ja että kokonaisuutena ajattelutaidot eivät ole vielä niin harjaantuneita, että käsitejärjestelmän sisäisten suhteiden ymmärrys rakentuisi välttämättä pysyvälle tasolle. Kokonaisuus kuitenkin antaa viitteitä siitä, että oikein toteutettuna teoreettista oppisisältöä voidaan syventää tietyin varauksin huomattavasti nykyistä aiemmin. Tutkimuksemme perusteella ei voida todentaa, olisiko tällaisella mallilla mahdollista kuitenkaan kehittää näiden sisältöjen myöhempää hallintaa.

Tutkimuksessa tuotettu oppimateriaali itsessään on käyttökelpoinen työväline luokanopettajille, jotka haluavat haastaa itseään ja oppilaita. Tämän tutkimuksen tuottama teoreettinen tieto kuitenkaan ei itsessään ole tutkimuksen merkittävin sisältö, vaikka esimerkiksi oppimateriaalin suunnittelussa ja kehittämisessä sitä voidaankin hyödyntää, vaan tutkimus ennen kaikkea nostaa esille kysymyksiä opetussuunnitelman laatimisen perusteista ja ajattelutaitojen opettamisen tärkeydestä. Tutkimuksen voidaankin arvioida ennemmin olevan hyvä kysymys, kuin eksakti vastaus – kehittämistutkimuksen periaatetta toteuttaen.

Avainsanat: alkuopetus, geometria, kehittämistutkimus, matematiikka, tapaustutkimus,

SISÄLLYS

1 JOHDANTO

Perinteisesti opetus suomalaisessa koulujärjestelmässä tapahtuu konstruktiivista oppimista tukevaan pyrkivän *spiraaliperiaatteen* mukaisesti – perusteet opitaan ensimmäisillä luokilla, ja samoihin sisältöihin palataan uudelleen myöhemmillä vuosiluokilla, aina aiemmin opittuun tukeutuen, ja sisältöä syventäen. Aiheen koetusta tärkeydestä riippuen samoja sisältöjä voidaan käydä peruskoulun kuluessa vuosittain, tai hieman harvemmin. Tällainen oppimisen malli on laajalti tunnustettu niin tutkitusti kuin arkikokemukseenkin nojaten, ja onhan eittämättä selvää, että sisällöistä pitää ymmärtää perusteet, ennen kuin aiheisiin voidaan pureutua syvemmin.

Riippuen aihealueesta, voidaan kuitenkin nostaa esille kysymys siitä, mitkä ovat ne perusteet, joiden osaamisen jälkeen voidaan opiskellun tiedon päälle rakentaa uusia käsitejärjestelmiä. Tarkasteltaessa esimerkiksi suomenkielen lukutaitoa, on selvää, että oppijan on ymmärrettävä ja hallittava kirjain- äänne -vastaavuus ennen, kuin voidaan siirtyä lukemaan lyhyitä sanoja, sitten kokonaisia lauseita, ja lopulta toivottavasti pystytään lukemaan ja ymmärtämään kokonaisia tekstejä. Matematiikan symbolikieltä käyttääkseen oppijan on ymmärrettävä numeromerkinnän, luvun ja lukumäärän vastaavuus, ja niin edelleen. Useimpien opiskeltavien sisältöjen kohdalla ei kuitenkaan ole yhtä helppoa määrittää perustietoja ja -taitoja, jotka olisi osattava ennen tiedon syventämistä.

Toinen merkillepantava seikka edellä mainittua oppimisen tapaa tarkasteltaessa on kysymys siitä, kuinka hyvin on hallittava perusteet, ennen kuin tietoja voidaan syventää ja missä vaiheessa koulupolkua eri sisältöjen perusteet olisi otollisinta opettaa. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet sisältää huomattavan määrän tietoja ja taitoja, jotka oppilaan tulisi yhdeksän kouluvuoden aikana omaksua. Vaikka aikaa on periaatteessa kosolti, perusteet useille pidemmän aikavälin tavoitteilla pyritään luomaan jo alkuopetuksessa, kahden ensimmäisen kouluvuoden aikana. Perustelut tällaiselle lähestymistavalle ovat tiettyjen asiasisältöjen kohdalla kyseenalaiset, kun huomioidaan lapsen ikäkausien mukaan kehittyvät ajattelumallit – suurin osa alkuopetusikäisistä lapsista kun toimii vielä täysin konkreettisen ajattelun tasolla, jolloin abstraktien käsitteiden opettelu voidaan osoittaa ellei mahdottomaksi, niin vähintään varsin haasteelliseksi.

Tällainen abstrakteista käsitteistä koostuva, kuitenkin loogisesta hierarkiasta rakentuva käsitteistö on geometrian käsitejärjestelmä. Mielenkiintoiseksi tarkastelun tekee se, että tyypillisesti alkuopetuksessa opetetaan geometriasta muutamia tunnistettavia muotoja, ilman näiden rakenteiden tarkkaa määrittelyä. Tällöin oppilas osaa nimetä asioita ilman, että tuntee tämän nimeämisjärjestelmän perusteita – kyseenalaistettavaa on se, tukeeko tällainen perusteeton nimeäminen myöhempää oppimista, vai voiko tästä olla jopa haittaa käsitejärjestelmän myöhemmälle ymmärtämiselle. Tällainen oppiminen ei ainakaan missään tapauksessa täytä Rauste-von Wrightin määritelmää opitun ymmärtämisestä silloin, kun oppija pystyy omin sanoin perustelemaan oppimansa. On myös havaittu (Silfverberg, 1999), ettei geometrian käsitejärjestelmän ymmärryksessä tapahdu ylemmillä vuosiluokilla merkittävää edistymistä – syytä tälle on mahdotonta sanoa, mutta voidaan olettaa jossain kohtaa käsitteistön rakentumista olevan ratkaisevia puutteita, tai virheellisiä käsityksiä.

Edellä esitetyt kyseenalaistukset spiraaliperiaatteen soveltuvuudesta kaikkiin oppisisältöihin, sekä puutteet nimenomaan geometrian käsitteistön myöhemmässä rakentumisessa toimivat alkusysäyksenä nyt käsissäsi olevalle tutkimukselle. Pro gradu -tutkielman laajuudessa ei ole mahdollista edes pääpiirteittäin selvittää kaikkia aiheeseen liittyviä ongelmia, mutta pyrimme kantamaan kortemme kekoon kehittämistutkimuksen periaatteita noudattamaan pyrkivällä, opetusharjoittelussa käyttämäämme materiaaliin ja samassa yhteydessä keräämäämme aineistoon pureutuvalla tutkimuksella.

Opetusjakso toteutettiin Hämeenlinnan normaalikoulussa toiselle vuosiluokalle – vaikka geometrian käsitteistöä ohuelti hipaistaan jo ensimmäisellä luokalla, käydään suurempi osa sisällöstä toisen vuosiluokan aikana, joten tällä tavoin saimme liitettyä opetuksen sekä sisällöllisesti että tavoitteellisesti edes löyhästi opetussuunnitelman perusteisiin. Vaihtoehtoinen näkökulmamme geometrian opetukseen oli käsitteellistämisen varhainen vahvistaminen, eli käsitejärjestelmän perusteiden opettaminen lähes alusta alkaen niin, kuin se korkeammassa matematiikassa esitetään. Lyhyesti tiivistettynä tutkimuksessamme selviää, mitä tapahtuu opetettaessa lukion matematiikan pitkää oppimäärää kahdeksanvuotiaille.

2 MATEMATIIKAN OPPIMINEN

2.1 Oppimiskäsitys

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet on laadittu perustuen oppimiskäsitykseen, jossa oppiminen ymmärretään yksilöllisenä sekä yhteisöllisenä tietojen ja taitojen rakennusprosessina. Oppimiskäsityksenä se pohjautuu konstruktiiviseen oppimiskäsitykseen, jossa oppilas käsittelee sekä tulkitsee opittavaa ainesta aiemmin omaksutun tietorakenteen pohjalta. Uusissa tilanteissa taas pyritään aktiivisesti hakemaan yhteyksiä vanhan tiedon ja nykytilanteen välillä. (Rauste-von Wright 1994). Oppiminen on kaikissa muodoissa aktiivinen ja päämääräsuuntautunut, itsenäistä tai yhteistä ongelmanratkaisua sisältävä prosessi (POPS 2004). Tämä oppimiskäsitys oli pohjana sekä suunnitellessamme että toteuttaessamme opetusjaksoa, pyrkimyksenämme oli saada oppilaat aktiivisiksi geometrian käsitekartan rakentajiksi.

2.2 Vaiheteoria ja lähikehityksen vyöhyke

Jean Piaget'n klassinen vaiheteoria määrittelee ikävuodet seitsemästä yhteentoista konkreettisten operaatioiden vaiheeksi. Matematiikan näkökulmasta lapsen pitäisi tällöin pystyä luokittelemaan asioita useiden ominaisuuksien perusteella ja järjestellä niitä loogisesti. Tällöin lapsen pitäisi myös pystyä deduktiiviseen päättelyyn ja soveltamaan sääntöjä yksittäisiin tapauksiin, sekä kyetä käyttämään abstrakteja käsitteitä suhteessa konkreettisiin asioihin. Myös ominaisuuksien säilyminen pitäisi tällöin pystyä ymmärtämään (Piaget ym. 1977).

Toinen kasvatustieteen perinteessä klassikon aseman saavuttanut teoria on Lev Vygovtskin lähikehityksen vyöhykkeen teoria. Tämä tarkoittaa operoimista ajattelun tasolla, jolla oppilas ei vielä itsenäisesti pysty operoimaan, mutta sopivasti tuettuna pystyy. Tämän teorian pedagoginen sovellus on scaffolding, joka tarkoittaa siis oppilaan haastamista hieman sen hetkiseen taitotasoon nähden liian vaikealla alueella, mutta siten suhteessa oppilaan taitoihin, että hän pystyy kuitenkin tämän tason saavuttamaan (Vygotski 1982).

2.3 Matemaattinen ajattelu

Matemaattisella ajattelulla tarkoitamme matemaattisen tiedon (konseptuaalisen, proseduraalisen tai strategisen) prosessointia, jota ohjaavat ajattelijan metakognitiot (Joutsenlahti 2005, 2009; Sternberg 1996). Matemaattisen ajattelun määrittelyyn ei ole olemassa yksiselitteistä eikä vain yhtä oikeaa määrittelyä. Erilaiset tutkimuslähtökohdat painottavat eri lailla matemaattiseen ajatteluun vaikuttavia tekijöitä. Joutsenlahti (2003) esittää matemaattiseen ajatteluun liittyvän viisi lähtökohtaa: uskomukset, kulttuuri, matemaattiset kyvyt, informaation prosessointi sekä ongelmanratkaisu.

Uskomukset ovat matematiikan opiskelussa keskeisiä vaikuttajia oppilaan ajatteluun ja toimintaan (Joutsenlahti 2003). Uskomuksien lisäksi samaan kategoriaan liittyvät oppijan asenteet sekä tunnetilat. Uskomukset voivat toisaalta toimia esteinä oppimisessa sekä toisaalta luovat maaperää matemaattisen ajattelun kehittymisessä. Negatiiviset asenteet, tunnetilat sekä mahdolliset pelkotilat vaikuttavat oppijoiden omaan matematiikkakuvaansa ja tekevät oppimisesta haastavampaa. Vastaavasti hyvällä itseluottamuksella ja positiivisella asenteella varustettu oppija on otollisemmalla maaperällä matemaattisen ajattelun kehittymisen kentällä.

Tietyn kulttuurin omaksunut ryhmä ammentaa kulttuuristaan ominaisia käytänteitä, tietoja, ammattikieltä sekä koodeja. Tutkittaessa yksilön matemaattista ajattelua kulttuurin näkökulmasta keskeisiksi tekijöiksi nousevat tilannesidonnaisuus, kieli ajattelun välineenä sekä kansallisen kulttuurin ominaispiirteet. (Joutsenlahti 2003). Kulttuurin vaikutus matematiikan ajattelussa näyttäytyy sosiaalisissa arkisissa tilanteissa, joissa kulttuurien piirtyneet ominaispiirteet tulevat esille. Kielen vaikutus matemaattiseen ajatteluun näyttäytyy mm. lukusanojen erilaisina rakenteina sekä tuo esille kulttuurien omaleimaisia vaikutuksia.

Matemaattinen kyky tarkoittaa lähinnä tehtävien ratkaisuihin orientoitumisena sekä erilaisten matemaattisten ajatusprosessien hallintana. Yksilön matemaattinen ajattelu on hänen matemaattisten kykyjensä säätelemä prosessi (Joutsenlahti 2003). Kyvyllä Joutsenlahti viittaa yksilön potentiaaliseen ominaisuuteen, jotka muodostuvat matematiikan keskeisten ajatteluprosessien hallinnasta.

Ongelmanratkaisutaitoihin sisältyy monia ajattelun tasoja, jotka yhdessä luovat joustavan ajattelun pohjan. Esteettinen ajattelu tarkoittaa pyrkimystä ratkaisuissa omaperäiseen oivaltavaan sekä lyhyeen esitystapaan. Analoginen päättely puolestaan viittaa opiskelijan vahvuuteen nähdä matemaattisten ongelmien ja käsitteiden välillä esiintyviä korrelaatioita, joiden avulla uusia matemaattisia ongelmia voidaan ratkaista. Matemaattisten käsitteiden struktuurin omaksuminen on keskeinen osa matemaattista ajattelua. (Joutsenlahti 2003). Näiden ymmärtäminen vaatii faktojen välisten sekä käsitteiden välisten suhteiden hahmottamista. Kokonaisuuksien hahmottamisessa on tärkeää matemaattisen ongelman tai käsitteen visualisointi, mitä monipuolisemmin opiskelija pystyy niitä käsittelemään, sitä tehokkaampaa matemaattinen ajattelu on. Viimeisenä ajattelun tasona ilmenee käänteinen ajattelu, jossa alkutilanteen sekä lopputuloksen avulla pystytään päättelemään ratkaisuprosessi.

Informaation prosessointia tutkivan lähestymistavan pohjana on ihmisen ajattelun kuvaaminen tietokoneen toiminnan mallina. Ihmisen tiedonkäsittelyjärjestelmässä tyypillistä informaation prosessointia ovat muun muassa havaitseminen, muistaminen, mieltäminen, ajattelu ja päätöksenteko (Laarni ym. 2001) . Tärkeimmät ajatteluprosessit puolestaan ovat kategorisointi, päätöksenteko, päättely sekä ongelmanratkaisu. Assosiaatioteoriaan perustuvassa konnektionismissa tiedon edustus oletetaan hajautetuksi ja tiedon prosessointi tapahtuu rinnakkain yli koko kentän (Joutsenlahti 2003). Konnektionismissa ihmismielen toimintaa verrataan neuroverkon toimintaan, jossa operoidaan suurella joukolla yksiköitä sekä niiden välisillä yhteyksillä.

2.4 Geometrisen ajattelun kehittyminen

Hollantilaisen van Hielen pariskunnan luoma teoria geometrisen ajattelun kehittymisestä on viisitasoinen. Silfverbergin mukaan teoria sisältää hypoteesin geometrisen ajattelun kehitykselle luonteenomaisten kehitystasojen olemassaolosta. (1999). Geometrisen ajattelun yleispiirteet van Hielen tasoilla luetellen ovat seuraavat (Crowley 1987):

> ***Taso 0, eli perustaso: Visualisointi***
>
> *Visualisoinnin tasolla geometriset käsitteet näyttäytyvät kokonaisuuksina, ne tunnistetaan muodon avulla ei niiden osien tai ominaisuuksien avulla. Henkilö joka toimii visualisoinnin tasolla pystyy oppimaan geometrisiä käsitteitä, tunnistamaan määriteltyjä muotoja sekä luomaan niitä.*

Taso 1: Analyysi

Analyysin tasolla geometristen kappaleiden analyysi alkaa, kappaleita tarkastellaan ja kokeillaan niiden ominaisuuksien näkökulmasta. Useiden esimerkkien käytön jälkeen oppilaat pystyvät tekemään yleistyksiä keskinäisten ominaisuuksien avulla. Analyysin tasolla oppilaat eivät pysty vielä selittämään yksityiskohtien välisiä eivätkä sisäisiä suhteita eivätkä ymmärrä määritelmiä.

Taso 2: Epämuodollinen luokittelu

Oppilas pystyy muodostamaan kuvioiden ominaisuuksien avulla sekä sisäisiä että välisiä yhteyksiä. Määritelmät ovat merkityksellisiä ja niitä pystytään seuraamaan sekä myös itse antamaan. Deduktiivistä päätelmää ei kuitenkaan kokonaisuudessaan pystytä ymmärtämään eikä aksiomisysteemejä.

Taso 3: Deduktio

Deduktion tasolla systemaattisen, deduktiivisen geometrian edellyttämä ajattelutapa hallitaan. Tällä tasolla kyetään annetuista tiedoista päättelemään seurauksia ja todistamaan geometrisia lauseita itsenäisesti. Probleeman annetut tiedot ja osoitettavaksi edelletyt tiedot osataan erottaa toisistaan. Määritelmän, aksiomin ja lauseen välinen ero samoin kuin lauseen ja sen käänteislauseen sekä ehtojen välttämättömyyden ja riittävyyden ero ymmärretään. (Silfverberg 1999).

Taso 4: Täydellisyys

Korkeimman geometrisen ymmärryksen tasolla pystytään operoimaan erilaisissa aksiomaattisissa järjestelmissä eli pystytään ymmärtämään epäeukliidista geometriaa.

2.5 Kielentäminen

Matematiikan kielentämisellä tarkoitamme tutkimuksessamme matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielen avulla (Joutsenlahti 2003, 2005, 2009; vrt. Høines 2000). Matemaattisella ajattelulla puolestaan tarkoitamme matemaattisen tiedon (konseptuaalisen, proseduraalisen tai strategisen) prosessointia, jota ohjaavat ajattelijan metakognitiot (Joutsenlahti 2005, 2009; Sternberg 1996).

Ajatusten pukeminen sanoiksi on välillä meille kaikille hankalaa. Viestin saaminen perille on oleellinen osa kommunikointia, jotta tulemme oikein ymmärretyiksi. Kielentämisessä on kyse oman ajattelun jäsentämisestä, joko sanallisesti tai kirjallisesti. Kielentämisen edut voidaan jakaa kolmeen ryhmään (Joutsenlahti 2005, Tikkanen2008, 102-105)

Ensimmäiseksi kielentäminen tukee oppijan omaa ymmärtämistä, ennen kuin yksilö voi kielentää ajatuksiaan muille, täytyy hänen selvittää ne itselleen. Puhumista edeltää ajattelu, jossa yksilön tarvitsee selvittää itselleen ongelman tarkoitusperät. Pelkkä puhumisen aloittaminen saattaa johtaa lukkotilanteen aukeamiseen, kun pohjatyö ongelman ratkaisemiseksi on tehty ajattelemalla. Matematiikan oppitunnilla usein apua opettajalta kysymään tuleva oppilas, keksiikin itse vastauksen kysymykseensä, kun aloittaa puhumisen opettajalle.

Toiseksi kielentäminen on sosiaalinen tekijä. Yksilö saa mahdollisuuden jakaa ajatuksiaan ja oppia toisilta sosiaalisessa kanssakäymisessä. Matematiikan kielentäminen rikastuttaa matematiikan oppimiskokemuksia luomalla ilmapiiristä vuorovaikutteisemman ja sitä kautta tuomalla symbolikielen rinnalle puhutun kielen. Puhutun kielen mukaan tuominen tuo matematiikkaa lähemmäksi todellisuutta ja arkipäivää, se luo osaltaan helpommin lähestyttävän ympäristön, johon lapsen on helpompi samaistaa itsensä. (Joutsenlahti 2005)

Kolmanneksi kielentämisen rooli on pedagogisena tekijänä, jossa oppilaan suorittama kielentäminen mahdollistaa opettajan havainnollistaa oppilaan ajattelu rakenteita ja oikaista väärinkäsityksiä. Pelkkiä matemaattisia symboleita katsellessa voi olla mahdotonta sanoa, mitä lapsi tekee väärin ja missä vaiheessa laskua virhe syntyy. Koetta korjatessa tulee usein eteen tilanteita, joissa yrittää päästä sisälle lapsen ajatusmaailmaan ja hakea vastausta kysymykselle ”mitä tässä on pyritty?” Kielentämisen etuna on puhutun kielen mukanaan tuomat selitykset, jotka vaihe vaiheelta kertovat mitä milläkin laskutoimituksella haettiin. Näin opettajan on helppo havainnoida mitä lapsi on osannut ja mitä ei, näin ollen myös ongelmakohtien vahvistaminen käy helpommaksi.

Matematiikassa kielellinen ilmaisu koostuu kolmesta eri kielestä (matematiikan symbolikieli, luonnollinen kieli sekä kuviokieli). Sanallisissa tehtävissä kieliä tulisi käyttää monipuolisesti, jotta matemaattisen ajattelun ilmaisu tulisi paremmin näkyville. (Joutsenlahti, Kulju 2010, 4). Nykyinen oppimateriaali on pitkälti rakennettu matematiikan symbolikielen ympärille, vaikka monille olisi luontevampaa toimia luonnollisen kielen sekä kuviokielen alueilla. (Joutsenlahti 2010, 4).

Puhuttaessa oma viesti menee helpommin perille, koska viestiä voi muokata keskustelun edetessä. Vuorovaikutteinen kommunikaatio mahdollistaa tarkentavien kysymysten esittämisen sekä mielipiteiden tai tarkoitusperien avaamisen. Kirjallinen kielentäminen vaati paljon enemmän kuin sanallinen kielentäminen. Ajatusten pukeminen kirjoitetuiksi lauseiksi vaatii paljon työtä. Viestin saaminen läpi juuri sellaisena kun sen antaja on tarkoittanut, vaatii paljon aivotyötä onnistuakseen. Siksi kirjoittamisprosessi saattaa selkeyttää ja kehittää edelleen opiskelijan matemaattista ajattelua, toteaa Joutsenlahti (2010, 4).

2.6 Käsitteellistämisen varhainen vahvistaminen

Tässä tutkimuksessa tarkoitamme käsitteellistämisellä toimintaa, jossa muodollisen, systemaattisen kielen avulla pyritään mahdollisimman selkeästi kuvaamaan objektien olemusta ja objektien välisiä suhteita, sekä ominaisuuksia jotka määräävät käsiteltävänä olevan objektin yksilöllisyyden. Tämän opinnäytetyön yhteydessä käsiteltäviä objekteja ovat geometriset muodot, joten jatkossa tässä tutkimuksessa geometrisella käsitteellä tarkoitetaan kyseisen matematiikan osa-alueen objektia, jolle on tarkka määritelmä suhteessa itseensä ja muihin mahdollisiin objekteihin. Määrittelyn ollessa suppea, voivat samat määritelmät päteä useaan, hyvin erilaiseen objektiin, ja määritelmiä tarkentaessa pääsemme lopulta tilanteeseen, jossa määritelmä rajaa mahdolliset objektit yhteen mahdolliseen yksilöön. Tällaista määritelmien tarkentumista kutsutaan käsitejärjestelmäksi. Käsitejärjestelmä koostuu yläkäsitteistä (vrt. suppeammat määritelmät) ja tarkemmista käsitteistä. Käytännössä jokainen käsite on alisteinen toiselle ylemmälle käsitteelle.

Kaikessa akateemisten aineiden kouluopetuksessa pyritään pääsääntöisesti tavalla tai toisella vahvistamaan tai syventämään oppilaan omaksumia käsitejärjestelmiä, joten useimmiten opetuksen tarkoituksena on käsitteellistämisen vahvistaminen. Olemassa ei ole mitään säädeltyä kriteeristöä, milloin jonkin tietyn käsitteen opettaminen on varhaista, joten tässä tapauksessa siis käsitteellistämisen varhaisella vahvistamisella tarkoitetaan sitä, että tietyn ikätason oppilaille opetetaan tiettyjä käsitteitä aikaisemmin, kuin perinteisesti on totuttu, eli aiemmin kuin opetussuunnitelmatyöryhmät ovat suunnitelleet. Toisaalta voidaan ajatella varhaisen käsitteellistämisen tarkoittavan myös ei-ikätason tai aivan ikätason ajattelutaitojen ylätasolla olevan sisällön opettamista, tässä tapauksessa abstraktin käsitteistön opettamista pääosin konkretian tasolla prosessoiville oppilaille, kuitenkin tietysti niin, että oppilaat pystyvät opetetut käsitteet liittämään omaan ajatteluunsa.

3 TUTKIMUKSEN TAVOITTEET

Tutkimuksemme tavoitteena oli selvittää, miten toisen luokan oppilas pystyy omaksumaan abstrakteja geometrisia käsitteitä, ja voisiko olla perusteltua syventää käsitteiden hallintaa vaiheessa, jossa oppilaat vasta tutustuvat opittaviin käsitteisiin. Lähdekirjallisuuden, opetussuunnitelman ja asiantuntijalausuntojen perusteella päädyttiin valitsemaan käsitteet, joiden hyvä osaaminen toimisi vakaana pohjana myöhemmälle geometrian oppimiselle. Tämän perusteella suunniteltiin opetusjakso (luku 5 ja liite 2), joka sisälsi tärkeimmät sisällöt. Opetusmateriaalin tavoitteena oli sen toteuttamiskelpoisuus, riittävä linkittäytyminen toisen luokka-asteen opetussuunnitelmaan sekä se, että siitä olisi opettajalle konkreettista hyötyä opetustyössä. Tämän tarkoituksena oli nostaa esille kysymyksiä opetuksen tavoitteista ja opetusmenetelmistä ja mahdollisesti osaltaan kehittää matematiikan opetusta alakoulussa. Tutkimuksen tuotoksena on siis tämän tutkimusraportin lisäksi tuotettu oppimateriaali.

4 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tutkimuksemme on toteutettu Hämeenlinnan normaalikoulun toisella luokalla syventävien projektiopintojen puitteissa toteuttamamme opetusjakson aikana kerätyn aineiston pohjalta. Opetusjakson tavoitteena oli vahvistaa geometrian käsitteellistämistä varhaisessa vaiheessa opettamalla kaikki alakoulun opetussuunnitelmaan kuuluvat tasokuviot, yksinkertaiset avaruuskappaleet sekä niiden väliset yhteydet ja määrittelyt loogisena kokonaisuutena yksinkertaisimmista monimutkaisimpiin. Tutkimuksemme tarkoituksena on selvittää, miten toisluokkalainen oppilas ymmärtää abstrakteja käsitteitä ja niiden välisiä yhteyksiä. Tutkimus on toteutettu kehittämistutkimuksen periaatteita noudattaen, mutta lyhyen tutkimusjakson, pienen joukon(N=20) ja heikon vertailtavuuden vuoksi tutkimusta voidaan pitää tapaustutkimuksena joka sisältää toimintatutkimuksen piirteitä. Analyysi on toteutettu pääosin aineistolähtöisesti, ja edellä mainittujen seikkojen vuoksi tutkimus on laadullinen, vaikka numeerisia menetelmiä käytetään analyysin tukena.

Tutkimuksen kohteena on sekä opetusjakson aikana mahdollisesti tapahtunut oppilaiden ajattelun kehittyminen, opetusjakson sekä oppilaille että opettajille tuottama uusi osaaminen, kuin myös itse opetusjakson sisältö ja sen suhde oppilaiden tuottamaan aineistoon. Edellä lueteltu kokonaisuus muodostaa yhden tutkittavan kokonaisuuden, tapauksen, vaikka tutkimuskohde ja tapaus eivät olekaan täysin toisiaan vastaavia sanoja, vaan tapaus ilmentää tutkimuskohdetta, joka voi olla yksilö, yhteisö, tapahtuma tai ilmiö, tässä yhteydessä opetusjakso. Tapaus itsessään on ainutlaatuinen – vaikka sama opetusjakso toteutettaisiin vastaavalla tavalla toisessa luokassa, muuttujia on liikaa jotta tulos olisi yleistettävissä, joten tavoitteena onkin tämän yksittäisen ilmiön syvällinen ymmärtäminen laajan aineiston avulla. (Laine, Bamberg & Jokinen 2008, 9–10; Metsämuuronen 2006, 90–92.)

4.1 Tutkimusmenetelmät

Tavoitteena tutkimuksessa oli toteuttaa kehittämistutkimuksen periaatteita mahdollisimman kattavasti käytössä olleen ajan puitteissa, koska oppimateriaalin kehittämiseen voidaan nimenomaan kehittämistutkimuksella todeta olevan tiettyjä merkittäviä etuja, jotka kuvataan tarkemmin omassa kappaleessaan. Tutkimusaineiston keruussa käytettiin myös strukturoitua haastattelua, josta myös on oma kappaleensa. Vaikka tutkijoiden tarkoituksena on nimenomaan toimintatutkimuksellisen otteen toteuttaminen, tai tarkemmin määriteltynä toimintatutkimuksen alulle paneminen, ei tässä yhteydessä täysin voida ohittaa myöskään perinteistä toimintatutkimusta, jonka piirteitä tutkimuksessa eittämättä myös on.

Toimintatutkimuksen piirteitä tutkimukseen tuo käytännön opetustyön yhdistäminen tieteelliseen tutkimukseen, jossa varsinaisen opettamisen lisäksi on pyrkimyksenä teoreettisen tiedon muodostaminen (Linnansaari 2004, 113). Toimimme jakson aikana siis sekä opettajina että tutkijoina, sillä tutkimusaineiston keräämiseksi oli pyrittävä tuottamaan muutosta myös oppilaiden tietoihin. Toimintatutkimuksellisuus limittyy luonnolliseksi osaksi tutkimusta, sillä tapaustutkimuksen tavoin toimintatutkimuskaan ei rajaa menetelmiä, vaan mahdollistaa niiden monipuolisen käytön. (Heikkinen & Jyrkämä 1999, 35). Toimintatutkimuksellista otetta edustaa myös jaksomme vallitsevasta opetussuunnitelmasta poikkeavat oppisisällöt, eli voidaan sanoa tutkimuksessa pyrityn vallitsevien käytänteiden kyseenalaistamiseen, jolla toimintaa on samanaikaisesti sekä tutkittu, että pyritty kehittämään (Heikkinen & Jyrkämä 33, 51). Toimintatutkimuksen kenttä on varsin laaja ihmistieteissä, ja teoreettista tietoa toimintatutkimuksesta on huomattavan paljon, mutta tässä yhteydessä emme näe perustelluksi pureutua toimintatutkimuksen käytänteisiin tämän tarkemmin.

4.1.1 Kehittämistutkimus

Kehittämistutkimus on varsin uusi menetelmä, mutta viime aikoina suomalaisetkin matematiikan, teknologian ja luonnontieteiden tutkijat ovat lisänneet sen käyttöä (esim. Aksela 2005, Juuti 2005, Hassinen 2006, Leppäaho 2007). Tutkimusmenetelmän tavoitteena on pelkän teoreettisen tiedon luomisen lisäksi auttaa opettajaa konkreettisesti kehittämään opetustaan (Wood & Berry 2003, 195) . Kasvatustieteissä nimitystä kehittämistutkimus on käytetty 1990-luvun alusta alkaen (Bannan-Ritland 2003, 21) ja tutkimusmenetelmän tuoreudesta johtuen sitä onkin tarpeen esitellä hieman tarkemmin.

Kehittämistutkimusta kuvaa yksinkertaisesti mutta osuvasti Artiquen (1994, 29) esittämä vertaus tutkimusmenetelmästä insinöörityöhön verrattavana mallina matematiikan opetukseen – vaikka insinöörin työ perustuu alan sen hetkiseen tieteelliseen tietoon ja teorioiden soveltamiseen, on hänen tavoitteenaan kuitenkin luoda entistä vaativampia ja monimutkaisempia tuotoksia, joihin ei sen hetkisellä tieteellä ja tekniikalla ole vielä antaa työkaluja. Samalla tavoin kehittämistutkimuksessa on tavoitteena luoda täysin uusia opetusmalleja ja kehittää jo olemassa olevia menetelmiä ja käytänteitä.

Artique (1994, 30) jatkaa esittämällä kaksi kysymystä joiden avulla lähestyä kehittämistutkimusta: 1) Mikä on tutkimuksen ja käytännön suhde opetuksessa? 2) Kuinka tutkimusmetodologiat sisällytetään luokan didaktisiin tilanteisiin? Hänen (Artique 1994) mukaansa nämä kysymykset auttavat määrittelemään tutkimukseen perustuvan opetuksen ja tutkimusmetodologian, joka perustuu luokassa toteutettuihin opetuskokeiluihin. Nämä kysymykset määrittivät tutkimustamme alusta alkaen, opetusjakso oli sovitettava toisen luokan tuntikehykseen ja alakoulun opetussuunnitelmaan sekä tutkimusmenetelmät oli otettava osaksi todellista luokkatilannetta.

Tutkimuksellinen ote, jossa edetään kohti asetettuja tutkimustavoitteita, prosessin järjestelmällinen dokumentointi, sen jatkuva arviointi ja tutkimuksen yleistettävyys ovat Edelsonin (2002, 116–117) määrittelemät kehittämistutkimukselle tyypilliset piirteet, jotka myös tutkimuksessamme toteutuvat. Myös Wangin ja Hannafinin (2005, 6–12) tarkennus kehittämistutkimuksesta systemaattisena, mutta joustavana metodologiana opetuksen teorian ja käytännön kehittämiseen tukee projektimme sopimista otsikon alle, vaikka pro gradu tutkielman puitteissa ei kaikkia kehittämistutkimukselle ominaisia piirteitä ole mahdollista suuremmassa mittakaavassa täyttää. Esimerkiksi Leppäaho (2007) on toteuttanut kokonaisvaltaisen kehittämistutkimuksellisen syklin teettämällä pro gradu tutkielmassaan (Lehtinen & Leppäaho 1991) luomansa ongelmanratkaisuoppimateriaalin useampana lukuvuonna eri oppilasryhmille ja näin saanut syklin päätökseen ja materiaalistaan haluamansa laisen.

Kehittämistutkimuksen viisi tärkeää piirrettä ovat Woodin ja Berryn (2003, 195–196) mukaan listattavissa seuraavaan muotoon:

> *1) Kehittämistutkimuksessa tuotetaan fyysinen tai teoreettinen artefakti tai tuote.*
> *2) Tuote testataan useita kertoja ja sitä kehitetään toistojen kuluessa.*
> *3) Tuotoksen parantelussa käytetään useita malleja ja teorioita.*
> *4) Kehittämistutkimus sijoittuu todelliseen kontekstiin, matematiikan opettajan päivittäiseen työympäristöön, mutta tulokset ovat jaettavissa ja yleistettävissä laajemmaltikin.*
> *5) Opettaja kasvattajana/tutkijana on mieluummin väliintulija kuin tarkkaileva osanottaja ja hän on vuorovaikutuksessa toisten opettajien kanssa, kun ammattimaisesti kehitettyä mallia kehitellään, testataan ja parannellaan.*

Tässä tutkimuksessa pystymme näistä ominaispiirteistä toteuttamaan kohtia yksi, neljä ja viisi, josta johtuen puhummekin kehitystutkimuksellisesta otteesta ja tutkimusmenetelmästä, emme kokonaisesta kehitystutkimuksesta. Varsinainen kehittämistutkimus vaatii pidemmän aikajänteen, ja Leppäahon (2007) mukaan soveltuukin parhaiten esimerkiksi tilanteeseen jossa opettaja tekee työhönsä liittyvää jatkotutkimusta.

Kuitenkin tutkimuksemme sijoittuminen todelliseen kontekstiinsa, eli luokkatilaan, ja tulostemme ja tuotostemme sovellettavuus käytäntöön tukee kehitystutkimuksellisen suunnan valitsemista. Edelson (2002, 118–119) esittää monta syytä pyrkiä opetuksen tutkimuksessa nimenomaan kehittämistutkimukseen, esimerkiksi opetusmateriaalien valmistuminen välittömästi käyttökelpoiseen muotoon ja tutkimuksen sijoittuminen todelliseen kasvatustyöhön ovat tällaisia syitä. Tutkimuksessamme myös suunniteltujen opetusmenetelmien välitön testaaminen ja oppilaiden kehittymisen huomioiminen aineiston suunnittelussa ovat leimallisia kehittämistutkimukselle. Kehittämistutkimus voisi matemaattisten aineiden lisäksi monessa muussakin oppiaineessa olla todellinen ratkaisu aidon tutkivan opettajuuden luomiseksi.

Kehittämistutkimuksen tutkimustulos ja -tieto muodostuu Edelsonin (2002, 108–110) mukaan päätöksistä joita tutkimuksen kuluessa tehdään, huomioiden tutkimuksen tavoitteet ja käytännön rajoitukset. Edelson (2002) puhuu tutkimuksen kehittämisryhmästä, joka tutkimuksessamme jäi varsin suppeaksi verrattuna esimerkiksi Leppäahoon (2007). Leppäahon ryhmään kuului tutkijan itsensä lisäksi muun muassa useita luokanopettajia, oppimateriaaliasiantuntija sekä tutkimuksen ohjaaja, kun taas toteuttamassamme projektissa oli mukana allekirjoittaneet, eli kaksi tutkijaopettajaa, normaalikoulun luokanopettaja sekä pro gradu tutkielman ohjaaja. Aikajänteen sekä otoksen koon lisäksi tämä tulee huomioida rajoitteena täysimittaisen kehittämistutkimuksen toteutukselle.

Projektimme päämääränä oli luoda käyttökelpoinen oppimateriaali, jonka avulla abstraktien geometristen käsitteiden opettaminen alkuopetusikäisille oppilaille olisi mahdollista. Toisaalta opetusmateriaali saattaisi parhaimmillaan myös selkeyttää käsitteidenvälisiä riippuvuussuhteita jopa ei-matemaattisesti orientoituneille opettajille, alakoulun geometrian ollessa tyypillisesti melko hajanaista ja määrittelyiltään löyhää ja joissain tapauksissa jopa ristiriitaista. Tutkimuksen alun merkittävimpiä kysymyksiä olivat opetettavan alueen rajaaminen, sillä oli selvää että tutkimuksen puitteissa olisi ylitettävä normaali toisen vuosiluokan opetussuunnitelma tietyiltä osiltaan, sekä hyvinkin abstraktin aihealueen sisällön tuominen toisluokkalaisen lähikehityksen vyöhykkeelle (Vygotski 1982). Tuntimäärät pidettiin pääosin toisen luokka-asteen tuntimääriä vastaavina.

Oppimateriaalin luominen tämän tyyppiselle jaksolle sisälsi lähtökohtaisesti tiettyjä haasteita. Koska oppisisällöt ohittivat niin monelta osin toisen luokka-asteen tavoitteet ja jaksotyyppisesti toisluokkalaisten näkökulmasta katsottuna hyvinkin syvälle teoriaan menevän opetusmenetelmän käyttö on alkuopetuksessa verraten harvinaista (POPS 2004), materiaalin suunnittelulle ei ollut luonnollista lähtökohtaa, vaan jakson suunnittelussa jouduttiin tekemään valistuneita arvauksia tutkimusryhmän kesken. Käsitteiden määrittelyn ja niiden välisten suhteiden, sekä loogisen opetusjärjestyksen lähtökohtana pidettiin soveltuvilta osin Väisälän (1959 1-35) teosta Geometria, joka sellaisenaan vastaa lukion matematiikan oppimäärää. Jakson pääpiirteisen suunnittelun jälkeen toteutimme yksinkertaisen lähtötasotestin, jonka perustella teimme jaksosuunnitelmaan tarvittavia muutoksia.

Kehittämistutkimusmenetelmä toteutuikin tämän tutkimuksen puitteissa pilottikokeilutyyppisesti, ja koko kehittämistutkimuksen kaari näkyy tässä tapauksessa kokonaisuudessaan tämän yhden jakson sisällä. Koska samanlaisen jakson toteuttamisesta ei löytynyt lähdeaineistoa, edettiin jaksolla tunti kerrallaan, tehden huomioita oppilaiden etenemisestä ja oppimateriaalin soveltuvuudesta toisluokkalaisten opetukseen. Tämän johdosta jokainen tunti voitiin suunnitella vasta edellisen tunnin pitämisen jälkeen, eli Edelsonin (2002, 109) kuvailemat ratkaisut ja kompromissit kehityksen suunnasta tehtiin hyvin tiheässä syklissä verrattuna kehittämistutkimukseen, jossa opetusjakso viedään kokonaisuudessaan läpi ja tehdään vasta ennen seuraavaa jaksoa tarvittavat muutokset. Varsinkin jakson alkuvaiheen oppimateriaali ja tehtävät ovat kartoittavia ja hahmottamiseen ja hienomotoriikkaan tähtääviä, joilla tavoitteena oli varmistaa oppilaille edellytykset suoriutua haastavasta materiaalista.
Edelsonin mukaan kehittämistutkimuksessa merkittävimpänä tuloksena on tutkimuksesta saatu tuotos. Siihen sisältyy tutkimuksen tekijöiden työ lähestyä prosessille asetettua päämäärää, sekä pyrkimykset vastata asetettuihin haasteisiin ja rajoituksiin. Ratkaisun muotoutuminen vaatii erilaisia vaiheita joissa tutkijat hajottavat monimutkaista kokonaisuutta pienempiin osiin, ja kuten muutkin kehittämistutkimuksen osa-alueet, myös ratkaisu kasvaa prosessin edetessä ja tutkijoiden saavuttaessa syvempää ymmärrystä tutkittavasta aiheesta (Edelson 2002, 109.). Tässä tapauksessa tutkimuksen ratkaisu ja tuotos on tulokset jotka esitetään luvuissa 5.3, 6 ja 7, sekä jakson edetessä muodostunut oppimateriaali (liite 2).

4.1.2 Haastattelu

Opetusjakso aloitettiin edellisessä kappaleessa kuvatulla tavalla lähtötasotestillä ja jakson lopussa järjestettiin tyypilliseen tapaan perinteinen jaksotesti eli koe opituista sisällöistä. Johtuen jakson luonteesta, eli huomattavasti opetussuunnitelman yli menevästä teoreettisesta aineksesta, kokeiden tuloksia ei ole mahdollista verrata toiseen oppilasryhmään, tai loppukokeella ei voida merkittävästi tutkia jakson vaikuttavuutta, koska oppilailla oli jakson alussa ainoastaan hyvin vähäiset ennakkokäsitykset geometriasta. Tällä aikajänteellä ja tämäntyyppisessä tutkimuksessa kvasikokeellisen menetelmän käyttäminen oli siis poissuljettu vaihtoehto. Kokeiden täydennykseksi järjestimme sekä opetusjakson alussa että lopussa haastattelut, jotka videoimme. Tällaiseen ratkaisuun päädyimme, koska voidaan olettaa ettei kaikkien toisluokkalaisten kirjoitustaito ole vielä sillä tasolla, että kirjallisessa vastauksessa kävisi ilmi oppilaan koko osaaminen, ja toisaalta halusimme haastatteluilla varmistaa, ettei kokeiden vastauksissa ole harhaanjohtavia tietoja väärinkäsitysten johdosta.

Haastattelut olivat teemahaastatteluita eli ns. puolistrukturoituja haastatteluja (Hirsjärvi & Hurme 2000, 47). Teemahaastattelu pohjautuu kohdennettuun haastatteluun, joka koostuu seuraavista ominaispiirteistä: 1) Haastateltavat ovat kokeneet tietyn tilanteen. 2) Tutkija on tehnyt alustavan sisällön- tai tilanneanalyysin tutkittavan ilmiön oletettavasti tärkeistä osista, rakenteista, prosesseista ja kokonaisuuksista. Analyysin perusteella tutkija on päätynyt tiettyihin oletuksiin tilannetta määräävien piirteiden seurauksista siinä mukana olleille. 3) Analyysinsa perusteella tutkija kehittää haastattelurungon. 4) Haastattelu suunnataan tutkittavien henkilöiden subjektiivisiin kokemuksiin tilanteista, jotka tutkija on ennalta analysoinut. (Hirsjärvi & Hurme 2000, 47.) Teemahaastattelu ei edellytä tiettyä kokeellisesti aikaansaatua yhteistä kokemusta, vaan siinä oletetaan, että yksilön kaikkia ajatuksia, kokemuksia, tunteita ja uskomuksia voidaan tutkia tällä menetelmällä (Hirsijärvi & Hurme 2000, 48).

Haastattelut toteutettiin yksilöhaastatteluina, jotta jokaisen kirjalliset tuotokset voitiin käydä suullisesti läpi halutuilta osin. Kirjallisesti suoritettu koe toimi haastattelun runkona, mutta kysymykset ja kysymysten muotoilu vaihteli riippuen haastateltavalta oppilaalta halutuista tarkennuksista. Hirsjärven ja Hurmeen (2000, 48) tällainen joustavuus sopii teemahaastattelun luonteeseen. Koska haastattelun toteutuspaikalla on oma vaikutuksensa haastattelutilanteeseen (Eskola & Suoranta 1998, 90–91), suoritettiin haastattelut erillisessä äänieristetyssä tilassa, jonne jokainen haastateltava tuli vuorollaan.

Hirsjärven ja Hurmeen (2000, 42) mukaan teemahaastattelun toteuttamiseksi on välttämätöntä, että haastattelija on tutustunut tutkimuksen kohteeseen sekä käytännössä että teoriassa. Koska tutkijat itse toimivat jakson suunnittelijoina ja opettajina, olivat he perehtyneet geometrian käsitteisiin ja olivat jakson aikana tutustuneet oppilaisiin. Haastateltavien motivaation (Hirsijärvi & Hurme 2000) säilymistä pyrittiin tukemaan pitämällä haastattelu lyhyenä ja haastattelutilanne paineettomana, niin että oppilas koki voivansa vapautuneesti kertoilla kokeestaan. Kaikki oppilaat osallistuivat mielellään haastatteluihin.

Haastatteluja käytettiin tutkimusaineistona vasta kirjallisten materiaalien koodauksen jälkeen, kun oli selvillä minkälaisiin ongelmiin ei kirjallisesta materiaalista ollut mahdollista löytää vastausta, ja toisaalta kirjallisesta materiaalista nousi aiheita, joille tarvittiin täydennystä. Näin kirjallisen aineiston teemoittelu toimi lähtökohtana haastattelujen sisällönanalyysille, joka toteutettiin aineistolähtöistä sisällönanalyysia noudattaen (Tuomi & Sarajärvi 2002, 110-115). Videoidut haastattelut katsottiin, kirjallisesta aineistosta nousseiden teemojen perusteella haastatteluista valittiin tutkimukseen uutta tai täydentävää tietoa sisältävät, jotka litteroitiin, luettiin ja jaoteltiin teemoittain.

5 OPETUSJAKSO

5.1 Opetusjakson sisältö

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan matematiikan opetuksen on edettävä systemaattisesti, ja sen tulee luoda kestävä pohja käsitteiden ja rakenteiden omaksumiselle. (POPS 2004). Tämän ohjenuoran perusteella rakensimme geometrian jaksomme. Ensimmäisellä ja toisella luokalla opetussuunnitelman sisällöt ovat geometrian osalta varsin ympäripyöreät, opetussuunnitelman ainoat nimetyt opetettavat käsitteet ovat piste, jana, murtoviiva, puolisuora, suora sekä kulma. Kaksiulotteisten ja kolmiulotteisten muotojen tunnistaminen, selostaminen ja nimeäminen. Kaksiulotteisten muotojen tekeminen, piirtäminen ja jäljentäminen sekä kolmiulotteisten kappaleiden tunnistaminen ja rakentaminen kuuluvat niin ikään sisältöihin. Lisäksi sisällöiksi on nimetty ympäröivän tilan avaruudellisten suhteiden havainnointi ja kuvailu sekä ympäristössä olevien geometristen muotojen havainnointi, kuvailu ja nimeäminen. Ja viimeisenä nimettynä sisältönä vielä yksinkertaisia peilauksia sekä suurennoksia.

Otimme Kalle Väisälän teoksen ”Geometria” jaksomme selkärangaksi ja rakensimme geometristä käsitejärjestelmää Väisälän oppien mukaisesti. Väisälä aloittaa geometrian peruskäsitteet pisteestä, geometriset pisteet ajatellaan ”äärettömän pieniksi”. Niitä kuvataan tavallisella pisteellä (.), pienellä renkaalla (o) tai ristillä (x). (Väisälä 1959, 1). Pisteen jälkeen Väisälä ottaa seuraavaksi käsitteeksi viivan. Opetussuunnitelmassa viivaa ei mainita käsitteenä ollenkaan. Geometriset viivat ajatellaan äärettömän ohuiksi. Viivaa voidaan piirtää äärettömän tiheässä olevien peräkkäisten pisteiden muodostamana. (Väisälä 1959, 1). Viiva on mielivaltaisen muotoinen ja mittainen yksiulotteinen kappale jolla ei ole leveyttä. Tuhattaiturissa ei viivaa käsitellä käsitteenä ollenkaan, eikä viivan käsittely itsenäisenä objektina ole yleisesti kovin tyypillistä geometriassa.

Harjoitteluluokkamme käytössä olleessa matematiikan oppikirjassa Tuhattaiturissa, geometrian ensimmäinen kappale käsittää pisteen, suoran sekä puolisuoran. Yhdessä tunnissa tulisi käsitellä siis kolme käsitettä. Kirjan mukaan käsitteet piste, suora, jana, nelikulmio, kolmio ja ympyrä kerrataan jo hallittavina käsitteinä, puolisuoran ollessa täysin uusi käsite.

Viivan jälkeen seuraavana käsitteenä tulee yksinkertaisin viiva, eli suora viiva. Väisälä määrittelee suoran kahden pisteen kautta molempiin suuntiin rajattomasti jatkuvana viivana (Väisälä 1959, 2).

Tuhattaiturissa suoran käsitettä ei opeteta pisteiden kautta lainkaan, vaan suora määritellään ainoastaan äärettömän pitkälle molempiin suuntiin jatkuvana. Lisäksi suora nimetään yhdellä pienaakkosella, kun projektissamme suora nimettiin Väisälän oppien mukaisesti kahden sillä olevan pisteen mukaan, esimerkiksi suora IJ.

Suoraa seuraavat käsitteinä puolisuora, joka on pisteestä alkava, toiseen suuntaan rajattomasti jatkuva suora. Jana, joka on puolestaan kahden pisteen välinen suora viiva sekä murtoviiva, joka taas on toisiinsa peräkkäin liitettyjen janojen muodostama viiva (Väisälä 1959, 2-3.). Tuhattaituri ei erittele erilaisia murtoviivoja ollenkaan vaan opettaa ainoastaan avoimen murtoviivan yleisnimellä murtoviiva.

Tason käsitteen mukaan ottamista puoltaa Väisälän taso- käsitteen käyttäminen muun muassa ympyrän ja monikulmion määrittelyssä. Väisälä määrittelee tason seuraavasti: Kaikkiin suuntiin rajattomasti jatkuvaa tasaista pintaa sanotaan tasoksi. Kolmen pisteen kautta, jotka eivät ole samalla suoralla, voidaan piirtää vain yksi taso. (1959, 4). Perusopetuksen opetussuunnitelmassa ei ole tasoa mainittu käsitteenä millään luokka-asteella.

Ympyrään tutustuminen aloitettiin yksinkertaisimman sekä tärkeimmän käyrän viivan eli ympyräviivan avulla. Ympyräviivan muodostaa piste, kun se kiertää keskipisteen ympäri. Ympyräviivan rajoittamaa tason osaa sanotaan ympyräksi. (Väisälä 1959, 5). Tavoitteena oli tuottaa oppilaille havainto, että samalle etäisyydelle yhdestä pisteestä piirretyt pisteet muodostavat ympyräviivan pisteiden lukumäärän lähestyessä ääretöntä - toki oppilaita ei vaadittu piirtämään ääretöntä lähestyvää lukumäärää pisteitä, muodon havaitsemisen kannalta riittävä määrä oli hyväksyttävä.

Säteen ja halkaisijan käsitteiden ollessa abstrakteja, jätimme käsitteiden määrittelyn vähemmälle ja tutustuimme niihin käytännön harjoitteiden kautta. Harjoitteiden avulla pyrimme vahvistamaan janan (säteen) tärkeyttä ympyrän olemassaololle ja sen roolia ympyrän koon määräävänä objektina. Käsitteitä säde ja halkaisija ei mainita ensimmäisen ja toisen luokan opetussuunnitelmassa. Tuhattaiturissa ympyrään tutustutaan ainoastaan kappaleena, sen eri osia ei nimetä.

Kulman käsitteen Väisälä määrittelee seuraavasti: Kahden samasta pisteestä alkavan puolisuoran rajoittamaa tason osaa sanotaan kulmaksi (1959, 8). Kulma mainitaan opetussuunnitelmassa yhtenä sisällön käsitteistä, Tuhattaiturissa kulmat jaetaan suoriin kulmiin sekä vinoihin kulmiin.

Määrittelimme myöskin terävät ja tylpät kulmat sekä kulman osat kärjen ja kyljet.

Monikulmion käsitteeseen kävimme kiinni suljetun murtoviivan avulla. Väisälä määrittelee monikulmion olevan umpinaisen murtoviivan rajoittama tason osa (1959, 22). Lisäksi murtoviivaa kutsutaan monikulmion piiriksi (Väisälä 1959, 22). Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa kaksiulotteisten kuvioiden tekeminen, piirtäminen sekä jäljentäminen kuuluvat geometrian oppisisältöihin ensimmäisellä ja toisella luokalla. Tuhattaiturissa monikulmiot opitaan tunnistamaan, sen kulmien sivujen sekä kärkipisteiden lukumäärän mukaan (esim. nelikulmio, viisikulmio). Otimme mukaan myöskin kappaleiden nimeämisen niiden kärkipisteiden mukaan (esim. nelikulmio ABCD).

Neliön ja suorakulmion käsitteiden määrittelyssä yhdistelimme sekä Väisälän määrittelyjä, että tuhattaiturin määrittelyjä. Määrittelimme suorakulmion seuraavasti: Suorakulmio on nelikulmio, jossa kaikki kulmat ovat suoriakulmia ja vastakkaiset sivut yhtä pitkiä. Neliön puolestaan määrittelimme seuraavasti: Neliökulmiota, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat suoria, sanotaan neliöksi.

Pallon ja kuution kuuluessa toisen luokan opetussuunnitelmaan avaruusgeometrian osalta, kävimme jakson lopulla läpi neliön ja kuution sekä ympyrän ja pallon eroja. Pyrimme ainoastaan tutustumaan kyseisiin kappaleisiin sen enempää niitä määrittelemättä.

5.2 Opetusjakson toteutus

Suoritimme syventävät projektiopinot Hämeenlinnan normaalikoululla helmi- maaliskuussa 2012. Luokaksemme valikoitui toinen luokka, joka vastasi parhaiten tarkoitusperiämme. Luokassa oli yhteensä 20 oppilasta, joista 12 oli tyttöjä ja kahdeksan poikaa. Luokanopettajan kanssa keskusteltuamme saimme vapaat kädet toteuttaa kokonaisen opetusjakson opetusharjoitteluun varatun aikataulun puitteissa. Opetettavista aihekokonaisuuksista valitsimme geometrian, johon syvennyimme ennen projektiopintojen alkamista. Päädyimme pitämään geometrian jakson täysin oppikirjavapaana ja luomaan kaiken tarvittavan materiaalin jakson kuluessa.

Aloitimme jaksomme lähtötasotestillä joka laadittiin, jotta pystyimme kartoittamaan oppilaiden tietoja geometrian käsitteistä. Testi sisälsi kolme kysymystä; ensimmäisessä oppilaiden tuli etsiä kuvasta geometriaan liittyviä käsitteitä ja nimetä ne. Toisessa kysymyksessä tiedusteltiin, josko oppilas löytäisi luokasta lisää muotoja. Kolmannessa kysymyksessä oppilaan tuli selittää löytämänsä muodot. Testin alussa avattiin sanallisesti oppilaille kolmatta kohtaa, ohjaamalla oppilaita selittämään miksi tiettyä muotoa kutsutaan juuri siksi.

Syvensimme tietämystämme oppilaiden geometrian käsitteiden tuntemuksesta strukturoidun haastattelun avulla. Haastattelimme jokaista oppilasta yksitellen normaalikoulun televisiostudiossa. Lähtötasotestin vastausten valossa valikoimme haastatteluun sanallisesti selvennettäväksi suorakulmion ja neliön eron sekä ympyrän piirtämisen. Ensimmäisessä kysymyksessä pyrimme selvittämään osaavatko oppilaat kielentää ymmärrettävästi neliön ja suorakulmion eron, ja ovatko käsitykset todenmukaisia. Käsitteitä, joita oppilas ei lähtötasotestissä käyttänyt, ei tuotu esille haastattelussa, pois lukien geometrian käsitteistöön kuulumattomien termien korjaaminen (suorakaide, neljö).

Lukujärjestyksemme jaksolle muodostui käsittämään viikoittain kuusi oppituntia. Tiistaisin ja torstaisin pidimme yhdet oppitunnit. Perjantaisin opetimme yhteensä neljä tuntia matematiikkaa. Kaksi tunneista oli puolikkaalle ryhmälle pidettäviä niin sanottuja jakotunteja ja kaksi tunneista koko ryhmälle samanaikaisesti pidettäviä tunteja. Pyrimme suunnittelemaan perjantain tunneille riittävästi toiminnallisia harjoitteita, koska matematiikan opiskelu koko päivän ajan voisi olla huomattavan raskasta oppilaalle. Oppimateriaalin suunnittelun ja kehittämisen kannalta "matematiikkaperjantait" toimivat hyvänä testialustana tehtäville, joita tyypillisellä tuntimäärällä voisi käyttää silloin tällöin oppituntien elävöittäjänä, tai lyhyinä toiminnallisina tuokiona esimerkiksi oppitunnin alussa tai lopussa.

Rakensimme jakson konstruktiivisen oppimisteorian mukaisesti ja Väisälän geometrian kirjaa soveltaen etenemään yksinkertaisimmista muodoista aina jo opittuihin käsitteisiin nojaten kohti uusia geometrisiä käsitteitä. Tässä projektissa päätimme jo aikaisessa vaiheessa jakson suunnittelua jättää kaikki mittaamis- ja laskemistehtävät pois opetuksesta, jotta pystyisimme keskittymään puhtaasti käsitteisiin ja niiden välisiin yhteyksiin. Jokainen oppilas loi jakson aikana oman geometrian vihkonsa (liite 1), joka koostui uusien käsitteiden määrittelyistä sekä kuvista, harjoitustehtävistä ja kotitehtävistä. Jokainen uusi käsite kirjattiin määritelmineen oppilaiden geometrian vihkoihin ja oppimista syvennettiin piirtämällä kuva määritelmän yhteyteen. Tuntien alussa pyrimme palauttelemaan edellisellä tunnilla opittuja käsitteitä ja tuntien lopulla käymään aina läpi uusien opittujen asioiden pääpiirteitä.

Aloitimme jakson pisteestä, jota päätimme kuvata ristillä. Päätimme valita ristin, koska sen avulla on luontevaa siirtyä viivaan ja huomata kahden viivan leikkauskohdan sijaitsevan yhdessä pisteessä, joka toisaalta täsmentää viivan ja pisteen koon suhdetta, ja toisaalta perustelee pisteen merkitsemistavan. Pisteen merkitsemistavalle ei myöskään ole oppikirjojen piirissä standardia, joka olisi rajoittanut valintaamme merkittävästi - merkitsemällä pisteen ristillä ajattelimme parhaimmalla mahdollisella tavalla tukevan oppilaiden käsitystä pisteen koosta verrattuna renkaaseen merkitsemistapana, mutta varmistavamme riittävän yksiselitteisyyden verrattuna helposti liian huomaamattomaksi merkattavaan tavalliseen pisteeseen. Terävien lyijykynien avulla teimme harjoituksen, jossa pisteen kokoa pyrittiin konkretisoimaan pyyhkimällä risteävistä viivoista niin paljon viivaa pois, että jäljelle jää ainoastaan piste. Tarkoituksena kun alun perin oli luoda tehtävä, joka olisi mahdoton ratkaista ja näin osoittaisi oppilaille pisteen äärettömän pienen koon. Kotitehtäväksi annoimme oppilaille piirtää 25 pistettä tyhjälle paperille, painotimme pisteiden sijoittelupaikkojen sattumanvaraisuutta sekä paperin laaja-alaista käyttöastetta.

Ensimmäisen viikon perjantain jakotunnit harjoittelimme hahmottamista perinteisen ruutujäljennöstehtävän avulla. Oppilaiden tuli piirtää ruutupaperille kuva, jonka toinen oppilas kopioi toiselle paperille parhaansa mukaan. Jakotuntien sijoittuessa päivän alkuun ja loppuun olimme pakotettuja pitämään niillä tunneilla toimintaa, joka ei suoranaisesti vienyt aihetta eteenpäin, vaan edellä kuvatulla tavalla toimivat elävöittävinä ja syventävinä harjoitteina.

Edellisen oppitunnin kotitehtävän pohjalta aloitimme tutustumisen seuraavaan käsitteeseen, viivaan. Yhdistimme papereille piirretyt pisteet toisiinsa viivojen avulla. Muodostuneista kuvioista oppilaat keksivät kuvion, jonka viimeistelivät ja värittivät. Tämän jälkeen vahvistimme viivan käsitettä ja sen teknistä toteutusta piirtämällä spiraalimaista labyrinttiä. Tarkoituksena oli piirtää mahdollisimman monitasoinen labyrintti, ilman että viivaa missään kohdassa risteää tai kulkee aiemmin piirretyn viivan päälle. Tällä tehtävällä pyrimme myöskin vahvistamaan oppilaiden käsisilmäkoordinaatiota. Pyrimme vahvistamaan oppilaiden ymmärrystä viivasta vetämällä langan luokan toisessa nurkassa istuvalta oppilaalta luokan vastakkaisessa nurkassa istuvalle oppilaalle niin, että lanka kulki myös luokan kaikkien muiden oppilaiden kautta. Viivan käsittely itsenäisenä objektina ole yleisesti kovin tyypillistä geometriassa,mutta päädyimme viivan esittelemiseen itsenäisenä objektina sekä luonnollisen yläkäsitteistön syntymiseksi, että jakson loogisen etenemisen rakentamiseksi.

Viiva- käsitteen jälkeen jatkoimme jaksoamme tutustumalla suoraan. Luokkaan viritetyn langan avulla tutkimme mahdollisimman lyhyttä matkaa luokan vastakkaisissa nurkissa istuvien oppilaiden välille. Suoran piirtämistä pisteiden välille harjoitettiin viivaimella eri harjoitusten avulla, jotta jokainen saisi aikaan tarvittavaan tarkkuuteen pystyvää tuotosta. Kotitehtäväksi oppilaiden tuli tutustua paperille piirrettyjen pisteiden välille muodostuvien suorien lukumääriin, kun pisteitä oli a) 3, b) 4 ja c.)5 kappaletta. Kotitehtävien tarkistuksen yhteydessä huomasimme ongelmatilanteita, joissa esimerkiksi kolme pistettä oli sijoitettu silmämääräisesti samalle linjalle, jolloin haettuun vastaukseen voinut päästä. Tästäkin tuli siten avoin tehtävä, joka olisi vältetty tarkemmalla ohjeistuksella.

Seuraavat uudet käsitteet olivat puolisuora, jana ja murtoviiva. Dokumenttikameran avulla taululle heijastettiin ohjeet, joiden mukaan oppilaiden tuli piirtää paperille edellä mainitut kuviot, niitä vielä nimeämättä. Kotitehtäväksi oppilaat saivat monisteen, jossa oli nimettyjä pisteitä (A-L). Oppilaiden tehtävänä oli muodostaa pisteiden suhteen annettuja muotoja. Edellisellä tunnilla aloitettua murtoviivaan tutustumista jatkettiin seuraavalla tunnilla toiminnallisin tehtävin. Oppilaille jaettiin keittämätöntä spagettia, ja tehtävänä oli pilkkoa ja valmistaa muodostuneista osista murtoviivoja, kuvitellen että spagetin palojen päät ovat kiinni toisissaan. Rakennettuja spagettimurtoviivoja nimettiin ja tutustuttiin avoimen murtoviivan käsitteeseen. Dokumenttikameran avulla tutkimme avoimen murtoviivan vierelle sijoitetun ötökän mahdollisuutta päästä janojen ulkopuolelle. Huomasimme, että tarvitsemme ötökälle pitämiseksi aloillaan tarvitsemme aitauksen. Tämän jälkeen jokainen oppilas yritti rakentaa omalle kuvitteelliselle ötökälle oman aitauksensa ja näiden valmistuttua pohdimme muodostuneen viivan nimeämistä. Läksyksi oppilaat saivat kertausmonisteen, jossa piti piirtää ja nimetä kolme annettua muotoa (jana, murtoviiva ja puolisuora). Seuraavalla tunnilla kertasimme vielä lyhyesti sen sisältämät käsitteet, suljetun ja avoimen murtoviivan eron sekä merkinnässä että muodossa, pisteen merkitsemisen, sekä painotimme piirustustarkkuuden tärkeyttä geometriassa.

Perjantain toiminnallisella tunnilla jatkettiin murtoviivan harjoittelua. Oppilaiden täytyi piirtää tyhjille papereille kuusi pistettä molemmille puolille, joista toiselle puolelle tuli muodostaa pisteet janoilla yhdistämällä avoin murtoviiva ja toiselle suljettu murtoviiva. Oppilaat jaettiin tämän jälkeen ryhmiin (3kpl), joissa ”karttoja” kierrätettiin ryhmäläisten kesken. Tarkoituksena oli kulkea koulun pihalla ”kartan” mukainen reitti. Jokaisella ryhmällä oli aikuinen valvomassa toimintaa. Lopputunnista murtoviivoja muodostettiin sekä nimettiin hyppynarujen avustuksella.

Murtoviivan jälkeen valitsimme seuraavaksi käsitteeksi tason. Suunnitelmana ei ollut tarkastella tätä käsitettä vielä kovin syvällisesti, käsitteen vaikeuden ja sen opetussuunnitelmaan kuulumattomuuden takia. Loogisen etenemisen ja käsitteiden eksaktin määrittelyn kannalta tämä oli kuitenkin pääpiirteissään käytävä jakson puitteissa. Varsinaiseen kokeeseen päätimme olla tekemättä yhtään tasoa käsittelevää tehtävää. Tunnilla tutustuimme yksi- ja kaksiulotteisuuteen. Tutkimme tähänastisten käsitteiden ulottuvuutta ja liikkumista niillä. Tämän jälkeen oppilaat rakentelivat kymppipalikoiden avulla ”tasoja” ja huomattiin,että niillä voi liikkua monipuolisemmin.

Seuraavana käsiteltävänä käsitteenä oli ympyrä. Ympyrään orientoituminen aloitettiin kaivamalla spagetit jälleen esille. Oppilaiden tuli piirtää piste A, josta tuli piirtää lyhyehkön spagetinpalan avulla useita janoja eri puolille paperia ja yrittää hahmottaa mihin geometriseen muotoon pyrimme tämän tehtävän avulla päätymään. Tehtävän jälkeen tutustuimme harppiin ympyrän piirtämisen mahdollistavana työkaluna, ja tarkoitus oli että edeltävän tehtävän jälkeen oppilaat olisivat ymmärtäneet harpin mekanismin keskipisteen ja muodostuvan ympyräviivan välisen etäisyyden määrääjänä. Harpin käyttöä ei mainita ensimmäisen tai toisen vuosiluokan opetussuunnitelmassa, mutta ympyrän käsitteen harjoittelun ja ymmärtämisen kannalta koimme harpin käytön tarkoituksenmukaiseksi. Tässä vaiheessa painotimme harpin terän ja kynän kärjen olevan sama kun piirrettävän ympyrän säde. Kotitehtäväksi oppilaiden tuli piirtää tyhjälle paperille Angry Birds-pelin kenttä, jota seuraavalla tunnilla pelaisimme. Pelasimme kenttiä harppien avulla niin, oppilaiden piti osata arvioida linnuille sopivia lentokaaria harpin kärkiväliä muuttelemalla. Nokkelimmat ymmärsivät nopeasti harpin toimintaperiaatteen ja sijoittivat harpin terän linnun ja sian keskellä saaden näin linnulla osuman sikaan. Jatkoimme ympyrän käsittelyä edellistunnin pohjalta.

Ympyrän määrittelyn kertauksen lisäksi piirsimme paperille ympyrän osat, keskipisteen, kehän, säteen sekä halkaisijan. Kävimme ympyrän osia läpi geogebra.org- internetsovelluksen avulla ja teimme vielä koulun pihalla havainnollistavia tehtäviä, joissa paria kohti annettiin hyppynaru ja parien tuli muodostaa narujen avulla ympyröitä. Tehtävää ei ohjeistettu tarkasti, vaan tarkoituksena oli että oppilaat pystyisivät jo opitun pohjalta päättelemään miten hyppynarua tulisi käyttää ympyrän muodostamiseksi. Tunnin lopuksi kokoonnuimme yhteen ja tutkimme esimerkkiparin avulla heidän tekemäänsä ympyrää ja havaitsimme että ympyrän kaarelle mahtuu vähän yli kolme halkaisijaa, eli kuusi sädettä. Läksyksi oppilaiden tuli etsiä kotoaan viisi ympyrää sekä viisi ympyräviivaa - tällä jaottelulla pyrimme vahvistamaan ymmärrystä tasosta kuvioiden osana. Kävimme seuraavalla tunnilla läksyn läpi ensin oppilaiden löydöksistä keskustelemalla ja sitten etsimme vielä luokasta sopivia esimerkkejä.

Ympyrän jälkeen tutustuimme kulmaan. Kulman käsittely aloitettiin taskulampun avulla, taululle alhaalta päin heijastettu taskulamppu demonstroi kulman aukeamista. Jatkoimme demoa kirjan sivujen sekä tauluharpin avulla päämääränämme saada oppilaat ymmärtämään, että kulma sisältää kulman lisäksi tason rajaavat sivut, mutta kulman koon määrää kuitenkin kulman aukeama, eikä kulman sivujen rajaaman alueen näkyville asetetun pinta-alan määrä. Pohdimme yhdessä mikä on suurin mahdollinen kulma ja teimme narun ja punnuksen avulla esimerkin suorasta kulmasta. Kävimme läpi myös terävän kulman sekä tylpän kulman ja harjoittelimme niiden nimeämistä. Oppilaiden tuli tämän jälkeen etsiä luokasta jokin kulma ja mennä sen luokse seisomaan, jonka jälkeen kiertelimme oppilaiden löytämiä kulmia ja nimesimme ne joko tylpiksi, teräviksi tai suoriksi kulmiksi. Aiheeseen liittyen oppilaat saivat kotitehtäväkseen etsiä kotoaan yhden jokaista kulmatyyppiä. Huonosti sujuneen kotitehtävän takia ohjeistimme oppilaat seuraavan tunnin jälkeen uudestaan kotitehtävään, tällä kertaa tuli etsiä kaksi jokaista kulmatyyppiä. Kulmien tutkimista jatkettiin istumalla lattialla ja tutkimalla selän ja jalkojen muodostamaa kulmaa. Erilaisten asentojen kautta oppilaat huomasivat suorakulman olevan vähiten rasittava asento, ylävartalon asettuessa pystysuoraan maan pintaa kohden. Suorakulma konstruoitiin tämän jälkeen dokumenttikameran välityksellä, harppien avulla. Piirsimme vielä sekä terävän että tylpän kulman paperille ja nimesimme ne.

ATK-luokan varaustilanteesta johtuen pääsimme sinne vasta jakson loppupuolella. Alkuperäisenä tarkoituksena olisi ollut mennä sinne hieman aikaisemmin tekemään esimerkiksi erilaisia hahmotustehtäviä. Tästä tunnista muodostui kuitenkin hahmotustehtävien tekoon keskittynyt tunti, koska sivusto jolle pyrimme pääsemään tekemään kertaavia tehtäviä ei toiminutkaan ATK-luokan koneissa. http://www.kolumbus.fi/mm.salo/LinkitMatikka.htm#Geometriaa linkistön kautta löysimme kuitenkin monta hyvää ja kehittävää tehtävää, joita oppilaat pääsivät kokeilemaan parinsa kanssa.

Monikulmioihin tutustuminen aloitettiin piirtämällä paperille kuusi pistettä ja yhdistämällä ne suljetuksi murtoviivaksi. Etsimme tämän jälkeen kuvioista erilaisia kulmia, tarkoituksena vahvistaa juuri opittua kulmien nimeämistä, sekä tuottaa oppilaille havainto siitä, että monikulmiossa todellakin on useita kulmia. Monikulmioiden nimeämiseen johdatti tehtävä, jossa oppilaiden tuli jakaa tyhjä paperi kahtia sekä piirtää toiselle puolelle 3 ja toiselle 4 pistettä ja tämän jälkeen yhdistää pisteet suljetuiksi murtoviivoiksi. Oppilaiden tuli keksiä näiden muodostuneiden kappaleiden avulla logiikka monikulmioiden nimeämiselle. Lopuksi kävimme koko luokan kanssa nimeämissäännöt yhdessä läpi, nimesimme paperille piirretyt kappaleet ja esitimme tarkentavia lisäkysymyksiä kuten esimerkiksi ”montako sivua on kolmiossa?” tai ”montako kulmaa on kahdeksankulmiossa?". Seuraava monikulmioita käsittelevä tunti aloitettiin kertaamalla monikulmion nimeäminen ja ominaisuudet sekä kulma ja suorakulma. Oppilaat saivat ideoida, miten neliö piirretään, jotta se olisi oikea neliö. Konstruoimme neliön piirtämisen harpin ja viivaimen avulla ja piirsimme värikkäälle kartongille sekä kolmion että neliön ja leikkasimme ne irti, jonka jälkeen revimme leikattujen kappaleiden kulmat irti. Suorakulmioita käsittelevällä tunnilla päätettiin ottaa käyttöön vähän kevyempi lähestymistapa. Suorakulmion määrittelyn jälkeen rakentelimme tangrameilla suorakulmioita sekä neliöitä.

Avaruusgeometriaa käsittelimme ainoastaan yhden tunnin ajan, pyrimme lähestymään aihetta tason kautta. Oppilaille luotiin mielikuva, jossa he ovat juuttuneet geometrian sisään. Tehtäväkseen he saivat pareittain mennä tutkimusmatkalle geometriamaailmaan ja etsiä koulusta geometrisiä kuvioita sekä kirjata ne ylös. Kymmenen minuutin matkan jälkeen he palasivat luokkaan ja kävimme läpi saatuja tutkimustuloksia. Varsinaisessa kokeessa ei kysytty avaruuskappaleista mitään.

Jakso nidottiin yhteen kertaustunnilla, jolla oppilaat vastasivat kahteenkymmeneen geometriaan liittyvään väittämään. Pelasimme lisäksi Alias- pelin kaltaista sanaselityspeliä käsitteillä, joita jakson aikana olimme opettaneet. Toisella kertaustunnilla kävimme tulosten pohjalta yhdessä läpi, kohtia joissa oli eniten hankaluuksia. Jatkoimme peliä myös toisella kertaustunnilla. Jakson päätteeksi pidimme kokeen, josta enemmän omassa kappaleessaan. Kokeiden tarkastuksen jälkeen pidimme vielä haastattelut, joissa tarkensimme kokeessa tapahtuneita virheiden syitä ja pyrimme selvittämään, olivatko virheet luonteeltaan kielentämisen haasteeseen liittyviä, vai johtuivatko ne selvästi vääristä käsityksistä.

5.3. Opetusjakson tulokset

Tehtävä 1

Tehtävä 1	A	B	C	D	E	F	yhteensä
Tyttö 1						1	1
Tyttö 2	1	1		1	1	1	5
Tyttö 3	1	1	1	1	1	1	6
Tyttö 4	1	1	1	1	1	1	6
Poika 1	1	1	1	1		1	5
Tyttö 5	1	1	1	1	1	1	6
Poika 2	1		1		1		3
Poika 3	1	1		1			3
Tyttö 6	1	1	1	1	1	1	6
Poika 4	1	1		1	1		4
Tyttö 7	1		1	1	1	1	5
Tyttö 8	1	1	1	1	1	1	6
Poika 5	1		1	1	1		4
Poika 6	1				1	1	3
Tyttö 9	1		1	1	1		4
Poika 7	1	1		1	1	1	5
Tyttö 10			1	1		1	3
Tyttö 11	1			1		1	3
Tyttö 12	1	1		1	1	1	5
Poika 8	1	1		1	1	1	5
	18	12	11	17	15	15	88
	90,00%	60,00%	55,00%	85,00%	75,00%	75,00%	73,33%

Taulukko 1

Ensimmäisessä tehtävässä kysyttiin onko väittämä oikein vai väärin. Tehtävätyyppi oli oppilaille tuttu, tavoitteena oli selvittää peruskäsitteistön tuntemusta. Tehtävä on toteutettu ainoastaan luonnollista kieltä käyttäen, kuvia ei ole mukana. Väittämät olivat seuraavat: a) Suljettu murtoviiva voi muodostaa monikulmion, b) Suorakulmiossa on kolme kulmaa, c) Suora alkaa pisteestä, d) Pallo ei ole ympyrä, e) Ympyrän säteen pituus määrää ympyrän koon ja f) Kolmio ei ole monikulmio. Taulukosta käy selville oikeiden vastausten määrä kussakin tehtävässä. Mikäli taulukossa on sarakkeessa lukuarvo 1, on oppilas vastannut kyseiseen väittämään oikein, mikäli sarakkeessa ei ole lukuarvoa, on väittämään vastattu väärin (Taulukko 1).

Ensimmäisessä tehtävässä vaikeimmaksi osoittautui väittämät b ja c, joista tehtävässä b oikeita vastauksia oli 12/20 ja tehtävässä c 11/20, muissa tehtävissä oikeita vastauksia oli vähintään 15/20 (Taulukko 1). Väittämän b (suorakulmiossa on kolme kulmaa) kohdalla epäselvyyttä on voinut aiheuttaa se, että suorakulmion kulmien määrään todellakin sisältyy kolme kulmaa, mutta oikea vastaus olisi kuitenkin neljä kulmaa, väitteen ollessa epätosi. Tutkimuksen kannalta kohdan c (suora alkaa pisteestä) suuri väärien vastausten määrä on kuitenkin merkittävämpää, tehtävän perusteella tulisi selvittää, onko syynä käsitteen abstraktius, ts. suoralle ei voi määrittää alkupistettä. Suoran myös opetettiin määritelmän mukaisesti niin, että suora voidaan määrätä kahden pisteen perusteella, mutta opetuksessa painotettiin, että suoralla ei ole alku- eikä loppupistettä. Tämän syvempi ymmärtäminen saattaa olla toisluokkalaisille haastavaa, eikä van Hielen geometrisen ajattelun asteikolla päästy analyysin tasoa pidemmälle. Muilta osin tehtävä on suoritettu hyvin, ja käsitteet ovat siltä osin hallussa, mitä tehtävän oikea suorittaminen vaati.

Tehtävä 2

Tehtävä 2	A(3)	B (1)	C (1)	D (3)	E (4)	F (0)	Piste arvo
Tyttö 1	1	1	1	1	1	-1	4
Tyttö 2	1	1	1	1	1	-1	4
Tyttö 3	3	1	1	3	4	0	12
Tyttö 4	1	1	1	1	3	-1	6
Poika 1	1	1	1	1	2	-1	5
Tyttö 5	1	-1	-1	1	3	-3	0
Poika 2	1	-1	1	1	1	-1	2
Poika 3	1	-1	0	1	1	-1	1
Tyttö 6	3	1	1	3	4	0	12
Poika 4	1	-1	1	2	2	-1	4
Tyttö 7	-1	1	1	1	1	-1	2
Tyttö 8	1	1	0	1	1	-1	3
Poika 5	1	0	0	1	1	-1	2
Poika 6	1	-1	1	1	1	-1	2
Tyttö 9	-1	1	1	-1	1	-1	0
Poika 7	1	1	1	-1	1	-1	2
Tyttö 10	-1	-2	-1	-1	2	-1	-4
Tyttö 11	-1	-1	-1	1	1	-1	-2
Tyttö 12	1	1	-1	2	1	-1	3
Poika 8	-1	-1	1	3	4	-2	4
	14	2	9	22	36	-21	62

Taulukko 2

Tehtävä 2	Piste arvo	Oikeita vastauksia	Vääriä vastauksia	Yht. vastauksia
Tyttö 1	4	5	1	6
Tyttö 2	4	6	1	7
Tyttö 3	12	12	0	12
Tyttö 4	6	7	1	8
Poika 1	5	6	1	7
Tyttö 5	0	6	8	14
Poika 2	2	4	2	6
Poika 3	1	3	2	5
Tyttö 6	12	12	0	12
Poika 4	4	6	1	7
Tyttö 7	2	4	2	6
Tyttö 8	3	5	2	7
Poika 5	2	5	3	8
Poika 6	2	4	2	6
Tyttö 9	0	3	3	6
Poika 7	2	4	2	6
Tyttö 10	-4	5	8	13
Tyttö 11	-2	2	4	6
Tyttö 12	3	5	2	7
Poika 8	4	10	6	16
	62	114	51	165

Taulukko 3

Toisessa tehtävässä piti yhdistää käsitteet ominaisuuksiin, jotka pätevät niihin. Tehtävätyyppi oli oppilaille tuttu, mutta tyypillisestä yhdistämistehtävästä poiketen yhteen asiaan saattoi liittyä useampia oikeita ominaisuuksia, ja joukossa oli myös yksi käsite jolle mikään ominaisuuksista ei pitänyt paikkaansa. Myös tämä tehtävä oli toteutettu vain luonnollista kieltä käyttäen. Tavoitteena oli selvittää sekä peruskäsitteistön tuntemusta, että ylä- ja alakäsitejärjestelmän ymmärrystä, eli oppilaan olisi tullut ymmärtää, että ominaisuus joka pätee jollekin alakäsitteelle, pätee tällöin myös kaikille kyseisen käsitteen yläkäsitteille. Käsitteet olivat a) Suorakulmio, b) nelikulmio, c) kolmio, d) monikulmio, e) neliö ja f) kuusikulmio. Ominaisuudet joihin käsitteet piti yhdistää olivat:

- kuviossa voi olla neljä kulmaa

- kuviossa voi olla yli kuusi kulmaa
- kuviossa vastakkaiset sivut ovat aina yhtä pitkiä
- kuviossa voi olla alle neljä kulmaa
- kuviossa kaikki sivut ovat aina yhtä pitkiä
- kuviossa on vain suoria kulmia.

Taulukon sarakkeissa kirjaimien jälkeen suluissa olevat numerot kertovat oikeiden ominaisuuksien lukumäärän (Taulukko 2).

Monikulmioiden käsitejärjestelmä on siinä määrin haastava, että jopa oppikirjasarjoissa saatetaan opettaa nämä hieman toisistaan poikkeavalla tavalla, joten tehtävä on toisluokkalaiselle erittäin haastava. Oikeassa vastauksessa on yhdistäviä viivoja kaksitoista, jota ei tehtävänannossa erikseen ilmoitettu. Yksikään annetuista määritelmistä ei sopinut kuusikulmioon, joten tehtävä on myös tyypiltään hankala, ja osittain tulokseen vaikuttikin oppilaille uusi tehtävätyyppi. Jälkikäteen ajateltuna tehtävätyyppi olisi tullut esitellä opetusjakson aikana, jotta tällaiselta ongelmalta olisi vältytty. Kuitenkin täysin oikeita vastauksia, jossa yhdistäviä viivoja on piirretty kaksitoista kappaletta, oli vastauksista kaksi, joten mahdoton tehtävä ei ollut, mutta äärimmäisen eriyttävä. Taulukossa oppilaiden piirtämät viivat käsitteiden sekä ominaisuuksien välille. Oikeita vastauksia (eli yhdistämisiä) on yhteensä 114 ja vääriä yhteensä 51 (Taulukko 3). Vastauksista peräti yhdessätoista kahdestakymmenestä oli piirretty ainoastaan yksi yhdistävä viiva yhtä määritelmää kohden, ja ainoastaan kahdessa vastauksessa ei oltu yhdistetty kuusikulmiota mihinkään käsitteeseen. Tehtävässä siis näkyy ennen kaikkea oppilaiden tehtävätyyppiorientoituneisuus, joten tutkimuksen kannalta tehtävä on tästä syystä hyvin vaikea analysoida. Kielentämisen näkökulmasta myöskin tehtävän ominaisuuksien määritelmä ”voi olla neljä kulmaa” on hankala. Määritelmä herättää kysymyksiä: voiko olla myös enemmän tai vähemmän kulmia. Monikulmioon liittyen määritelmä on helpommin ymmärrettävissä, mutta nelikulmiota pohdittaessa monella oppilaalla taisi mennä sormi suuhun. Vaikeudet tehtävässä eivät johdu pelkästään tehtävätyypistä, vaan käsitejärjestelmä itsessään on haastava. Kuudella piirretyllä viivalla olisi ollut mahdollista saada viisi oikein, ja tällaiseen vastaukseen on päätynyt vain yksi oppilaista, tämän lisäksi on yksi vastaus jossa kuudella viivalla on saatu neljä oikeaa vastausta.

Tehtävä 3

Tehtävä 3	Tylppä kulma	Suorakulma	Terävä kulma	oikein
Tyttö 1	1	0	0	1
Tyttö 2	1	1	1	3
Tyttö 3	1	1	1	3
Tyttö 4	1	1	1	3
Poika 1	1	1	1	3
Tyttö 5	1	1	1	3
Poika 2	0	1	0	1
Poika 3	0	0	1	1
Tyttö 6	1	1	1	3
Poika 4	1	1	0	2
Tyttö 7	1	1	0	2
Tyttö 8	1	1	1	3
Poika 5	1	1	1	3
Poika 6	1	1	1	3
Tyttö 9	0	0	1	1
Poika 7	1	1	1	3
Tyttö 10	1	1	1	3
Tyttö 11	1	1	1	3
Tyttö 12	0	0	1	1
Poika 8	1	1	1	3
	16	16	16	48

Taulukko 4

Tehtävässä kolme piti nimetä kulmat aukeaman perusteella. Kulmat esitettiin kuvina, ensimmäinen kulmista oli tylppä kulma, toinen suorakulma ja kolmas terävä kulma. Tehtävätyyppi oli oppilaille tuttu ja tavoitteena oli selvittää oppilaiden taitoa hahmottaa kulman suuruutta kuvan perusteella, sekä selvittää oppilaan kyky tunnistaa kulma sen erilaisen merkintätavan perusteella.

Jokaiseen tehtävän kohtaan tuli oikeita vastauksia yhteensä 16 kappaletta niin, että kaikki viisi oppilasta sai yhden pisteen, kaksi oppilasta kaksi pistettä ja loput kolme. (Taulukko 4) Taulukossa sarakkeella on pistearvona yksi mikäli oppilas on osannut nimetä kulman oikein ja nolla mikäli nimeäminen on mennyt väärin. (Taulukko 4). Keskimäärin kulmien nimeäminen niiden aukeaman perusteella osattiin siis varsin hyvin. Tästä tehtävästä heikosti suoriutuneet suoriutuivat kokeesta keskimääräistä heikommin.

Tehtävä 4

Tehtävä 4	a	b	c	d	e1	e2	pisteet
Tyttö 1	1	0	0	1	1	0	3
Tyttö 2	1	1	1	1	1	0,5	5,5
Tyttö 3	1	1	1	1	1	1	6
Tyttö 4	1	1	1	1	1	1	6
Poika 1	1	1	1	0	1	0,5	4,5
Tyttö 5	1	1	1	1	1	1	6
Poika 2	1	1	0	0	1	1	4
Poika 3	1	1	1	0	0	0	3
Tyttö 6	1	1	1	1	1	1	6
Poika 4	1	0	0	1	1	0	3
Tyttö 7	1	1	1	1	1	1	6
Tyttö 8	1	1	1	1	1	1	6
Poika 5	1	1	1	1	1	1	6
Poika 6	1	1	1	1	1	1	6
Tyttö 9	1	1	0	0	1	0	3
Poika 7	1	1	0	0	1	0	3
Tyttö 10	1	1	1	0	1	0	4
Tyttö 11	1	1	1	1	1	1	6
Tyttö 12	1	1	1	0	0	0	3
Poika 8	1	1	1	1	1	1	6
	20	18	15	13	18	12	96

Taulukko 5

Neljäs tehtävä oli piirustustehtävä, jossa oppilaan tuli piirtää annettu kuvio. Käsitteistön hallinnan lisäksi tehtävässä mitattiin oppilaiden kykyä piirtää siistejä ja tunnusmerkit täyttäviä kuvioita annettujen määritteiden perusteella, joten käsitteidenhallinnan lisäksi oppilaiden motorisilla valmiuksilla oli vaikutusta tehtävissä suoriutumiseen. Annetut kuviot olivat a) Suljettu murtoviiva

ABCD, b) Jana EF, c) Puolisuora GH, d) Suora IJ, e) Ympyrä K ja sille säde. Kohtaan a) jäi kokeeseen painovirhe, sillä murtoviiva ABCD ei ole suljettu, vaan tehtävässä olisi pitänyt lukea ABCDA. Tämän tehtävän pistemäärää ei huomioitu siksi kokeen lopputuloksissa, mutta jakson jälkeisessä haastattelussa kysyttiin, oliko oppilaat huomanneet virhettä kokeessa, ja näin tuosta virheestä saatiin tutkimukseen kuitenkin aineistoa. Taulukossa sarakkeella on pistearvona yksi, mikäli piirros vastaa annettua käsitettä. Kohdassa e on kaksi kohtaa, joista ensimmäisestä saa yhden pisteen mikäli on osannut piirtää ympyrän harpin avulla. Toinen kohta eli säteen piirtäminen vaatii ensimmäisen kohdan onnistumisen, jotta siitä voi saada pisteen. Kahdessa tapauksessa ympyrään oli piirretty säteen lisäksi erinäinen halkaisija, joissa tapauksissa annoimme oppilaille puoli pistettä (Taulukko 5).

Tässä tehtävässä keskimääräinen pistesaalis oli varsin korkea, myös siitä syystä, että kaikki saivat kohdasta a yhden pisteen. Vaikeimmaksi osoittautui suoran piirtäminen (13/20) sekä ympyrän säteen merkitseminen (12/20) (Taulukko 5). Suoran kohdalla suurin vaikeus oli merkinnässä, virheellisten merkintöjen takia useassa vastauksessa suora näytti joko janalta tai puolisuoralta, oppilas ei siis ollut ymmärtänyt jatkaa suoraa tarpeeksi yli merkittyjen pisteiden. Tämä saattaa toisaalta liittyä hahmottamisen vaikeuteen, mutta toisaalta myös tehtävä 1 osoitti, että suora on yksi vaikeimmista käsitteistä ymmärtää, johtuen sen päättymättömästä luonteesta. Kohdan e1 ympyrän piirtäminen oli helppoa, ainoastaan kahdella oppilaalla jäi tästä pisteet saamatta, johtuen vaikeuksista harpin käytössä. Näytti kuitenkin siltä, että tälle toiselle luokalle harpin käyttö työvälineenä ei keskimäärin ollut motorisesti liian haastavaa.

Tehtävä 5

Määritelmä	kappaletta
Neljä kulmaa	12
Neljä yhtä pitkää sivua	9
Nelikulmio	8
Neljä suoraa kulmaa	4
Monikulmio	4
Suljettu murtoviiva	1
Rajaa sisälleen tason	1
Piirrettävä viivaimella	1

Taulukko 6

Viides tehtävä ei ollut tehtävätyypiltään toisluokkalaisille aiemmin tuttu. Tehtävänä oli kirjoittaa kaikki, mitä oppilas tietää neliöstä. Tavoitteena oli selvittää, pystyykö toisluokkalainen kielentämään oppimaansa täysin konstruoimattomassa tehtävässä, pystyykö oppilas selkeästi ilmaisemaan käsitteistön yläkäsitteestä alakäsitteeseen ja onko oppilaan mahdollista esittää neliön ominaisuudet eksaktisti.

Kielentämisen käsitteen sekä geometrian käsitteiden hallitsemisen ymmärtämisen kannalta tämä tehtävä oli ehdottomasti kokeen mielenkiintoisin, tosin yleisesti ajateltuna tehtävän suorittamiseen vaikuttaisi suuresti oppilaan kirjoitustaito, joka ei kuitenkaan kokeen perusteella heikentänyt tämän ryhmän suorituksia. Käsitejärjestelmän näkökulmasta mielenkiintoista on se, että neliöstä kerrottaessa yläkäsitettä monikulmio on käyttänyt neljä oppilasta, mutta tarkemmin määriteltyä yläkäsitettä nelikulmio on käyttänyt kahdeksan oppilasta. Näin pienellä ryhmällä ei voida todentaa, onko kyse sattumasta vai lapsen tavasta hahmottaa maailmaa, mutta voidaan arvella, että lapsen olisi helpompi hahmottaa lähempänä olevia käsitteitä. Tyypillisesti mainittuja neliön ominaisuuksia olivat neljä kulmaa (12/20) ja neljä sivua (9/20) (Taulukko 6). Yksittäisissä tapauksissa oli osattu kertoa myös esimerkiksi, että neliö rajaa tason osan, ja että suljettu murtoviiva on neliön osa (Taulukko 6). Selvästi usein toistuvia virheellisiä käsityksiä ei neliöön liittyen ollut, mutta vaikeammissa käsitteissä, kuten taso, sattui lipsahdus, kun oppilas kirjoitti että neliön sisällä on ilmaa – toisaalta vastaus kuitenkin antaa ymmärtää, että oppilas käsittää neliön sisällä olevan alan kuuluvan kappaleeseen. Kahdessa vastauksessa oli virheellisesti kerrottu, että neliön tekee se, että siinä on neljä kulmaa - jälkeenpäin on mahdotonta määrittää, onko oppilaan ollut tarkoitus kertoa, että neliössä on neljä kulmaa, vai onko vain tarjottu virheellistä määritelmää. Käsitteellistämisessä alkuopetuksessa vaikuttaisikin olevan yhtenä rajoittavana tekijänä oppilaiden äidinkielen hallinta kielen vivahteiden ymmärtämisen ja sanavaraston osalta.

6 ANALYYSI

Tutkimuksessa, jossa tutkitaan koko opetusjaksoa kokonaisuutena, analysoitavan aineiston muodostaa käytännössä kaikki jakson aikana tuotettu, havainnoitu ja tapahtunut. Tämän tutkimuksen yhteydessä kirjallista aineistoa ovat tuottaneet sekä oppilaat kansiotöiden ja kokeiden muodossa, että tutkijaopettajat tuntisuunnitelmien ja tunneilla tehtyihin havaintoihin perustuvan opetuspäiväkirjan muodossa. Täydentäväksi aineistoksi on kerätty oppilaiden videoidut haastattelut.

Aineiston suuri määrä ja hyvin vaihteleva laatu ovat sen tasapainoisen analysoinnin kannalta haastavat. Koska tutkimuksen päämäärä on opetettavan sisällön ja oppimateriaalin kehittäminen, valittiin ensisijaiseksi aineistoksi tutkijaopettajien itsensä tekemä opetuspäiväkirja – päiväkirjasta käy ilmi tutkijaopettajien opetushetkellä tekemät havainnot oppimateriaalien ja tehtävien soveltuvuudesta oppilaille, sekä jo opetushetkellä syntyneet käsitykset oppilaiden oppimisesta. Tällä lähestymistavalla aineistoon koimme pystyvämme parhaiten vastaamaan asettamiimme tutkimuskysymyksiin. Aineiston laajuuden ja monipuolisuuden vuoksi lähestymistapoja ja painotuksia voisi olla muitakin, mutta selkeällä painopisteen valinnalla pyrimme rajoittamaan tutkimuksen haarautumista oppimateriaalin ja sisällön kannalta vähemmän oleellisiin tekijöihin.

6.1 Luokittelu

Ensisijaiseksi analyysimenetelmäksi valikoitui sisällönanalyysi, laadullisen tutkimuksen perusmenetelmä, jolla etsitään tekstin merkityksiä (Tuomi & Sarajärvi 2004). On todettava, että voidaan pitää kyseenalaisena tilannetta, jossa tutkija tekee analyysin itse tuottamastaan sisällöstä, mutta tulkittaessa sisällönanalyysiä Tuomen ja Sarajärven mukaisesti toimintana, joka perustuu tulkintaan ja päättelyyn, jossa edetään empiirisestä aineistosta kohti käsitteellisempää näkemystä tutkittavasta ilmiöstä, voidaan todeta sen soveltuvan myös tämänkaltaisen aineiston analysointiin. Analyysi jaetaan karkeasti (Tuomi & Sarajärvi 2004, 106-115) kolmivaiheiseksi prosessiksi seuraavien vaiheiden mukaan:

1) aineiston redusointi eli pelkistäminen

2) aineiston klusterointi eli ryhmittely

3) abstrahointi eli teoreettisten käsitteiden luominen

Tutkimuksemme tapauksessa ensimmäinen vaihe koostui havaintojen ja käsitysten poimimisesta päiväkirja-aineistosta, eli poistimme tekstistä tuntien sisältöjen ja toiminnan kuvauksia niin, että jäljelle jäi ainoastaan tehdyt havainnot ja tutkijaopettajien käsitykset oppimistilanteiden sujuvuudesta. On huomioitava, että opetusjaksoa ja oppimateriaalia tutkiessamme joudumme ilman muuta tutkimaan oppilaiden toiminnan lisäksi myös omaa toimintaamme. Mahdollisesti esitettävään kritiikkiin omien havaintojemme käyttämisestä aineistona voimme todeta, että käytännön tutkimustyö perustuu aina tutkijan omien havaintojen tutkimiseen ja tulkitsemiseen, joten tältä osin lähestymistavassamme ei pitäisi olla ristiriitaa.

Aineiston ryhmittely tarkoittaa tässä tutkimuksessa käytännössä havaintojen luokittelua. Havainnot käytiin läpi useita kertoja, jonka aikana muodostettiin käsitys havaintojen luokista. Ensimmäisessä vaiheessa luokkia muodostettiin useita, samat havainnot saattoivat kuulua useampaan ryhmään ja ryhmillä ei ollut selkeitä yläkäsitteitä. Kun ryhmät alkoivat saada lopullista muotoaan, otettiin sekä alku- että loppukokeet tarkasteluun, ja selvitettiin, onko kokeiden tuloksilla tai koevastauksilla vastaavuutta tekemillemme havainnoille. Tämän jälkeen koevastauksista tehdyt havainnot luokiteltiin opetuspäiväkirjan analyysin mukaisiin luokkiin – tässä vaiheessa havaintojen luokittelua tarkennettiin edelleen.

Tässä tutkimuksessa ei lähtökohtaisena tavoitteena ollut aineiston pohjalta luoda uutta teoreettista käsitteistöä, vaan kehittää luomaamme oppisisältöä ja saada käsitys opetusjakson haasteista. Tämän johdosta abstrahoinnin vaihe toteutui käytännössä niin, että havaintojen luokittelujen ja luokittelujen tarkentamisen jälkeen kirjoitimme näistä luokitteluista seuraavat kokonaisuudet, jotka nousivat mielestämme merkittävimmiksi tekijöiksi luotaessa käsitteellisesti haastavaa materiaalia toisluokkalaisille. Nämä aineistolähtöiset teoriat siis pyrkivät vastaamaan mahdollisimman hyvin asetettuihin tutkimusongelmiin, ja vastaamaan osaltaan käsitteellistämisen varhaisen vahvistamisen haasteisiin.

6.1.1 Konkretia vastaan abstraktio

Tutkimuksen kohteeksi valikoitui matematiikan aihealueesta juuri geometria sen vuoksi, että kaikki käsitteet määriteltiin luonnollisen kielen avulla, jolloin matematiikan symbolikielen hallinta tai numeerisen prosessoinnin taso ei päässyt vaikuttamaan käsitteiden ymmärtämiseen. Koska lähtökohtana kaikelle määrittelylle oli luonnollinen kieli puhutussa ja kirjoitetussa muodossaan, oppilaiden kielellisillä valmiuksilla on merkitystä käsitteiden oppimiselle – kielellisten valmiuksien vaikutus on kuitenkin läsnä kaikessa oppimisessa, joten ei ole syytä nostaa sitä erityisen merkitykselliseksi tekijäksi juuri geometrian käsitteistön hallinnassa.

Toisluokkalainen operoi Piaget'n mukaisesti pääasiassa konkretian tasolla, jonka oletimme olevan abstraktien käsitteiden kohdalla merkittävä haaste – se toki olikin, mutta opetuksellisesti hieman ennakko-oletuksista poikkeavalla tavalla. Perinteisesti pääosin arkikokemuksiin perustuen oppimisen apuna suositellaan käytettävän runsaasti konkreettisia esimerkkejä, mutta tutkimusaineistosta esille nousseiden havaintojen perusteella voidaan tietyiltä osin tällaista käytännettä kyseenalaistaa. Näyttää nimittäin siltä, että konkreettisesti operoivan lapsen käsitejärjestelmässä konkreettinen selitys voittaa pääsääntöisesti abstraktin. Tämä voi olla melko itsestään selvää, mutta oletusarvoisesti abstraktien käsitteiden opetuksessa huomionarvoinen seikka.

Hyvä esimerkki tällaisesta käsitteen vääristymästä konkreettisen esimerkin johdosta on pisteen koko. Kun pisteen käsitettä opettaessamme yhden kerran käytimme konkreettisena esimerkkinä pisteen koon määrittelemättömyydestä lyijykynän kärkeä, osa oppilaista oli yhä jakson lopussa sitä mieltä, että piste on nimenomaan lyijykynän kärjen kokoinen. Konkreettinen lyijykynä siis ilman muuta voittaa keskimääräisen toisluokkalaisen käsitejärjestelmässä abstraktin ”ei- minkään-kokoisen” pisteen.

Käsitteen konkreettisen arvon ei välttämättä tarvitse olla peräisin opettajan puolihuolimattomasta esimerkinannosta, vaan myös arkikielen käsitteistö asettaa haasteensa abstraktien käsitteiden sisäistämiselle. Tällaisia ongelmakohtia ovat jo edellä mainittu piste, jolla on arkikielessä useampikin vastine, ja toinen geometrian peruskäsite, suora, joka onkin arkikielessä jonkin asian ominaisuus, adjektiivi, vinon vastakohta. Vaikka suoran käsite opetettiin aivan jakson alkuvaiheessa, ja se äärettömään olemukseen säännöllisesti palattiin, edelleen jakson loppukokeessa jana objektina oli oppilailla huomattavasti paremmin hallussa. Puolisuorakin hallittiin isoveljeään suoraa paremmin, eli näyttäisi siltä että yhteen suuntaan ääretön kappale on helpompi käsitellä verrattuna kahteen suuntaan äärettömään. Selkeä alku, ja mielellään myös loppu, tekevät objekteista konkreettisempia ja helpommin hahmotettavia.

Perusopetuksen opetussuunnitelman tavoitteissa geometrian osalta toisella luokalla on kappaleiden nimeäminen. Peruskappaleista ympyrä näyttäisi olevan tietyiltä osin vaikein käsitteellistää, vaikka sanana ympyrä tarkoittaa sekä arkikielessä että geometriassa jotakuinkin samaa. Toisin kuin esimerkiksi monikulmioiden, ympyrän määritelmä on huomattavasti hankalampi ymmärtää, ympyrään kun harvoin piirretään näkyvää sädettä – säteen käsitteen ymmärtämiselle oman hankaluutensa saattaa tehdä myös sanan arkikielinen käyttö, mutta varsinaisia merkkejä tällaisesta ei tutkimusaineistossamme näy. Joka tapauksessa, vaikka säde on ympyrän määräävä tekijä, ei sen merkityksellisyyden ymmärtämisessä havaittu jakson aikana huomattavaa kehitystä, vaikka kaikki oppilaat ympyrän muotona tunnistivatkin ja säteen merkitystä harjoiteltiin myös toiminnallisen tehtävän avulla. Tämän vaikeuden syitä voi olla monia, mutta yhtenä mahdollisena voidaan arvioida olevan nimenomaan vahva ennakkokäsitys ympyrästä muotona, jolloin sen hajottaminen tekijöihinsä on haasteellisempaa.

Kokonaisuutena käsitejärjestelmän ymmärtäminen näyttäisi toisluokkalaisen näkökulmasta helpottuvan, kun käsitteet saavat enemmän määritelmiä. Esimerkiksi juuri monikulmiot ja murtoviiva ovat tällaisia käsitteitä, joilla on sopiva määrä määritelmiä. Vaikka abstrakti käsite taso oli hyvin haasteellista ymmärtää, monikulmion ja suljetun murtoviivan ero ymmärrettiin silti kohtuudella. Toisaalta, mitä pidemmälle käsitejärjestelmässä edettiin, sitä vaikeammaksi muodostui käsitejärjestelmän hallinta kokonaisuutena – oppilas pystyy nimeämään kolmion ja nelikulmion ominaisuuksiensa perusteella, mutta hänelle tuottaa vaikeuksia nimetä molemmat näistä monikulmioiksi.

6.1.2 Käsitejärjestelmien rakentuminen

Havaintojen perusteella käsitteiden oppimisen kannalta yksi haasteellisimmista kokonaisuuksista on käsitejärjestelmän kokonaisuuden ymmärtäminen. Toisluokkalainen vaikuttaisi oppivan yksittäisiä käsitteitä käsitteen määritelmän perusteella siis jopa varsin hyvin – tietyt ominaisuudet määrittelevät tietyn objektin, eli objekti nimetään ominaisuuksiensa perusteella. Tämä lapsen on varsin yksinkertaista ymmärtää ja tämä on myös linjassa Piaget'n vaiheteorian kanssa.

Käsitejärjestelmä, jossa järjestelmällisesti tarkennetaan käsitteistöä ja sama objekti kuuluu useampaan luokkaan, ei sen sijaan rakennu automaationa, vaan vaatii monipuolisempaa ymmärrystä käsiteltävästä asiasta. Lapsi ymmärtää kuitenkin helposti, että vaikka varis on lintu, eivät kaikki linnut ole variksia, joten tässä valossa hierarkkisen käsitejärjestelmän opettamisen toisluokkalaiselle on mahdollista. Tämän tutkimuksen perusteella ei voida todeta, olisiko tarpeen opettaa käsitejärjestelmien muodostumista itsessään ennen geometrisiin käsitteisiin tutustumista, koska on mahdotonta todentaa tällaisen harjoittelun siirtovaikutusta ilman aiheeseen paneutunutta tutkimusta.

Lähdettäessä tarkastelemaan geometrisen käsitteistön hierarkian tuntemusta opetusjakson lähtötilanteessa, näyttää siltä, ettei oppilailla ollut minkäänlaista ennakkokäsitystä käsitystä siitä, että geometriset käsitteet muodostavat toisiinsa suhteissa olevan järjestelmän. Tutkimukseen osallistuneista oppilaista ainoastaan 2 (n=19) nimesivät suoran ja tason geometrisiksi käsitteiksi, mutta alakäsitteet ympyrä, kolmio, suorakulmio ja neliö olivat tuttuja lähes jokaiselle. Opetussuunnitelman perusteella tämä oli toki oletettavissakin. Oppilaat tunsivat joitain geometrisia käsitteitä nimeltä, mutta nimeämisperusteet olivat varsin alkeellisella tasolla eikä käsitejärjestelmän suhteiden ymmärtämisestä havaittu merkittäviä esikäsityksiä.

Opetetuista käsitteistä selkeimmin hierarkkisen käsitejärjestelmän muodostavat monikulmiot, joten tämän tutkimuksen puitteissa on luonnollisinta tarkastella käsitejärjestelmän ymmärtämistä monikulmioiden määrittelyn oppimisen kautta. Väisälä (1959, 22) määrittelee monikulmion murtoviivan rajaamaksi tason osaksi, joten näiden määrittelyn kannalta olennaisten käsitteiden hallinta on myös monikulmioiden määrittelyn kannalta oleellista. Murtoviivaan käsitteenä perehdyttiin melko monipuolisesti, ja käsite olikin myös kokeen perusteella varsin hyvin hallussa.

7. YHTEENVETO JA POHDINTAA

7.1 Tulosten tiivistelmä ja arviointi

Tutkimuksen ollessa laadullinen tapaustutkimus, eivät tulokset ole yksiselitteisesti yleistettävissä. Tutkimuksemme perusteella kuitenkin voidaan sanoa, että toisen luokan oppilaille on tuloksellisesti opetettavissa verraten opetussuunnitelmaan kirjattuja tavoitteita haastavampaa sisältöä, ja että tutkimusryhmän toisluokkalaiset pystyivät tietyissä määrin muodostamaan opetetusta sisällöstä käsitteistöä, jonka perusteella pystyivät operoimaan. Havaitun perusteella voidaan kuitenkin todeta tietyntyyppisten sisältöjen opettamiseen tarvittavan huomattavan tarkkaa suunnittelua, ja tiettyjen sisältöjen kohdalla on pohdittava, onko niiden opettamisen aikaistamisen harkitseminen perusteltua.

Hierarkkisen käsitejärjestelmän ja objektien luokittelun ylä- ja alakäsitteisiin ymmärtäminen vaatii ajattelutaitoja, joiden harjaannuttaminen sinällään on arvokasta. On kuitenkin kyseenalaista, onko ensikosketuksen tällaisen järjestelmän opettelemiseen syytä tulla muutenkin haastavien geometristen käsitteiden yhteydessä. Asiamme ei ole ottaa kantaa siihen, olisiko matematiikan tai muiden oppisisältöjen yhteydessä syytä tietoisesti pyrkiä hierarkkisten käsitejärjestelmien rakentamisen opetteluun, mutta yleisellä tasolla ajateltuna tämä voisi tukea sekä geometrian, että monien muiden sisältöjen oppimista, sekä yleisiä ajattelutaitoja.

Jotkin abstraktit käsitteet ovat suurimmalle osalle oppilaista huomattavan haastavia sisäistää, tämä on kiistämätön tosiasia. Toinen kiistämätön tosiasia on se, että kaikki oppilaat eivät koskaan saavuta hyvän osaamisen kuvauksessa mainittuja tietoja ja taitoja, riippumatta täysin sisällöstä. Toisaalta hieman yllättäen, toisaalta täysin arvattavasti luokka, jolle opetusjakson toteutimme, menestyi loppukokeessa aivan kuten missä tahansa muussakin kokeessa – keskimäärin osaaminen oli keskimääräistä, muutama oppilas pärjäsi varsin heikosti ja muutama huomattavan hyvin. Vaikka opeteltava aines oli mahdollisesti hyvinkin haastavaa, voitaisiin tässä yhteydessä todeta, että käsitteellistämällä opetusta jo varhaisessa vaiheessa, opetetaan asiat todellisessa yhteydessään ja varsin seikkaperäisesti. Aineksen teoreettisuudesta huolimatta hitaammallakin oppijalla on tällöin mahdollisuus sisäistää opiskeltava asia.

7.2 Tutkimuksen luotettavuus

Tutkimuksessa, jossa tutkija itse on kiinteänä osana tutkittavaa toimintaa, on aina tutkimuksen luotettavuuteen liittyviä kysymyksiä. Ilman muuta tutkijan tulee pyrkiä objektiiviseen prosessointiin, mutta tutkijan tapa kokea oma toimintansa ja oman toimintansa vaikutus tutkittavaan ilmiöön ei koskaan voi tällaisessa tapauksessa olla täysin objektiivinen – tämän tutkimuksen tapauksessa, kun aineiston keruu on tapahtunut rinnan tutkittavan oppimateriaalin kehittämisen kanssa on tutkijoiden omilla ratkaisuilla ollut myös ratkaiseva merkitys aineiston laatuun, ja siihen, millaista aineistoa kertyy. Tässä tapauksessa mahdollisimman luotettavan tutkimustiedon tuottamiseen on pyritty kaikkien tutkijoiden ratkaisujen mahdollisimman huolellisella ja avoimella perustelulla ja kuvaamisella.

Koska kyseessä on laadullinen kehittämistutkimus, voidaan luotettavuuden mittarina osaltaan pitää myös syntynyttä oppimateriaalia – tässä tapauksessa siis voidaan sanoa, että tutkimus on tuottanut verraten luotettavaa tietoa aiheesta, koska tutkimuksen aikana tuotetulla oppimateriaalilla voidaan opettaa oppilasryhmälle tietyt sisällöt. Koska aikaisemmin tutkimuksessa perustelluista syistä vertailuryhmää ei ollut asetettu, emme voi sanoa, onko kyseinen oppimateriaali parempi tiettyjen sisältöjen opettamiseksi, kuin jokin toinen oppimateriaali, joten luotettavuuden nimissä emme edes yritä sanoa, että näin olisi. Vertailu on erittäin vaikeaa myös siitä yksinkertaisesta syystä, että perinteisesti nyt opettamiamme sisältöjä ei ole toisluokkalaisille opetettu.

Perinteisenä mittarina tutkimuksen luotettavuudelle on pidetty sen toistettavuutta, eli tutkimuksen pitäisi antaa samat tulokset myös muiden tutkijoiden toteuttamana. Koska kyseessä kuitenkin on laadullinen tutkimus, jossa tutkijat itse ovat olleet aktiivisessa roolissa, näin ei välttämättä ole – eri tutkijat voisivat kokea erilaiset yksityiskohdat tutkimuksen kuluessa merkittäviksi ja tulkita erilaisia tapahtumia eri tavoin, jolloin analyysi ja johtopäätökset voisivat näyttää hyvinkin erilaisilta. Uskallamme kuitenkin väittää, että tuottamamme opetusjakson toteuttaminen jollain toisella koululuokalla tuottaisi likimain vastaavia tuloksia oppisen näkökulmasta – osa oppilaista sisäistäisi opetetut aihealueet hyvin, osa vähemmän hyvin, toki niin, että eritasoisten oppijoiden määrä olisi riippuvainen kyseisen koululuokan oppijoiden oppimisvalmiuksista.

7.3 Lopuksi

Kuten johdannossa totesimme, tutkimuksestamme selviää, mitä tapahtuu, kun lukion matematiikan pitkää oppimäärää opetetaan kahdeksanvuotiaille. Tutkimuksen lopussa on selvää, ettei tuo lause ole tarkoitettu kirjaimellisesti luettavaksi, vaan sisällöistä on poimittu tiettyjä käsitteitä, joiden oletimme olevan toisluokkalaisen soveltuvia opetusmetodeja hyödyntäen mahdollista oppia. Tutkimuksen edetessä on käynyt ilmi, että projektimme kuluessa on syntynyt käytännössä enemmän uusia kysymyksiä, kuin uutta tietoa – tämä kertoo toivottavasti enemmän aluetta koskevan tutkimustiedon määrästä, kuin tutkijoiden tavasta toteuttaa tutkimusta. Joka tapauksessa relevantteja jatkotutkimusaiheita on noussut tutkimusta tehdessä esille useita.

Laajamittaisen kehittämistutkimuksen toteuttamiseksi kehittämämme opetusjakso tulisi toteuttaa uudelleen ainakin kerran tai kaksi, ja tehdä materiaaliin tarvittavat muutokset. Koska opettamamme sisällöt eivät kuitenkaan ole valtakunnantasolla opetussuunnitelman tavoitteissa, tällaisen tutkimuksen laajamittaiselle toteutukselle ei välttämättä ole nähtävissä perusteltua tarvetta – miksi opettaa oppilaille systemaattisesti opetusvelvollisuuden ulkopuolisia asioita, kun opetussuunnitelman sisällöissäkin on riittävästi oppilaille sisäistettävää. Materiaalin kehittämiselle ei siis ole tällä hetkellä varsinaista käytännön tarvetta, vaan ensisijainen keskustelun aihe olisikin opetussuunnitelman sisältö – minkälaiset tavoitteet ylipäätään geometrian oppimisen osalta koetaan mielekkäiksi ja perustelluiksi, mitä taitoja oppilaan olisi hallittava ja millä tasolla. Tällä hetkellä koulumatematiikassa suurimman siivun vie aritmetiikka ja algebra, erityisesti mekaaninen laskutaito. Vaadittaisiin kenties laajempaa keskustelua matematiikan opetuksen luonteesta, ja siitä, millaisia ajatteluvalmiuksia halutaan opetuksella tukea.

Ristiriitaisesti edellä mainittu johtaa siihen, että tutkimusprojektimme henkeä toteuttavia projekteja tarvittaisiin laajemmalla tasolla, vertailuryhmiä ja pitkäaikaisseurantaa käyttäen, ennen kuin voitaisiin todeta aidosti, olisiko lähestymistavan muutoksella matematiikan opetussuunnitelmissa merkittäviä vaikutuksia koko ikäluokan matematiikan osaamisen laatuun ja määrään. Tällaisen ajattelun tuominen opetussuunnitelmatyöhön vaatisi mahdollisesti koko opetussuunnitelman laajuudelta tutkimustulosten huomioimista ja niiden osoittamien parannuskohteiden aitoa toteuttamista, nykyisen useasti varsin arvolatautuneen keskustelun tilalle. Matematiikan osalta tiedeyhteisön ja asiantuntijoiden lausunnot ovat toki merkittäviä, mutta myös matematiikan opetukselle annettu tuntimäärä on ilman muuta vaikuttava tekijä.

Mielenkiintoinen, mielestämme tutkimisen arvoinen seikka liittyy myös johdannossa esiteltyyn spiraalimalliin. Nykyisessä opetussuunnitelmassa on nimetty aiheita, joihin on tarkoitus tiettyjen vuosiluokkien puitteissa tutustua. Tämä johtaa siihen, että oppimateriaaleihin on tehty sisältöjä, jotka ensimmäisellä aiheeseen tutustumiskerralla ohitetaan varsin pintapuolisesti. Matematiikan alueella esimerkiksi geometria ja mittaaminen ovat tällaisia aiheita. Perusajatuksena tässä on tietysti se, että oppilas on muodostanut ennakkokäsityksen aiheesta, ja kun asiaan syvemmin pureudutaan, on oppilaalla ainakin tieto siitä, että kyseiset aihealueet ovat olemassa olevia käsitteitä. Tässä yhteydessä ohitetaan kuitenkin oppijan itsensä muodostama käsitys itsestään suhteessa opittavaan ainekseen – toivottavana ei voida missään tapauksessa pitää erityisesti hieman hitaammin oppivien oppijoiden kohdalla aiheiden nopean käsittelyn mahdollisesti synnyttämää kokemusta siitä, että asia oli vaikea, etten sitä oppinut. Vaikka asiaa ei olisi ensimmäisen käsittelykerran aikana ollut kaikkien edes tarpeen sisäistää, muodostaa jokainen oppimiskerta oppijassa joitain tuntemuksia ja muistijälkiä.

Ottamatta sen enempää kantaa matematiikan opetukselle annettuun tuntimäärään tai oppimiskäsityksiin, voimme lopuksi palata tutkimuksemme perusajatukseen – mitä, miten ja milloin voimme oppilaalle opettaa. Tulostemme valossa näyttäytyy melko haastavankin käsitteellisen sisällön opettaminen jo alkuopetusikäisille lapsille mahdollisena vaihtoehtona. Emme pysty sanomaan, tuottaako tällainen lähestymistapa parempaa osaamista tai analyyttisempaa ajattelua geometrian opiskelussa myöhemmissä vaiheissa koulupolkua, mutta voimme tutkimusraporttimme päätteeksi esittää yhden kysymyksen, ja yhden väittämän; onko käsitejärjestelmän myöhemmän laajentamisen ja käsitteiden ymmärtämisen kannalta olennaista osata nimetä erilaisia muotoja, vai ymmärtää, että kysymyksessä on järjestelmä, jossa muotojen nimeämiselle on perusteensa? Joka tapauksessa uuden tiedon rakentaminen aiemmin opitun pohjalle on mahdotonta, jos aiemmin ei ole mitään opittu.

LÄHTEET

Aksela, M. (2005). Supporting meaningful chemistry learning and higher-order thinking through computer-assisted inquiry: A design research approach. Helsinki: Helsingin yliopisto. Kemian laitos.

Artique, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. Teoksessa Biehler, R. Scholz, R. Strâer, R. & Winkelmann, B. (toim.) Didactics of mathematics as a scientific discipline. Dordrecht: Kluwer, 27–39.

Bannan–Ritland, B. (2003). The role of design in research: The integrative learning design framework. Educational Researcher, 32 (1) 21–24. Fairfax, Va.: George Mason University.

Crowley, M. (1987). The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. Teoksessa Montgomery Lindquist, M. (toim.) Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers1-16.

Edelson, D. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. The Journal of the Learning Sciences 11 (1), Lawrence Erlbaum Associates, Inc.105–121.

Eskola, J. & Suoranta, J. (1998). Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Tampere: Vastapaino.

Hassinen, S. (2006). Idealähtöistä koulualgebraa IDEAA-opetusmallin kehittä- minen algebran opetukseen peruskoulun 7. luokalla. Helsinki: Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos.

Heikkinen, H & Jyrkämä, J. (1999). Mitä on toimintatutkimus? Teoksessa Heikkinen, H. Huttunen, R. & Moilanen, P.(toim.) Siinä tutkija missä tekijä. Toimintatutkimuksen perusteita ja näköaloja. Jyväskylä: Atena.

Hirsjärvi, S. & Hurme, H. (2000). Tutkimushaastattelu: Teemahaastattelun teoria ja käytäntö. Helsinki: Yliopistopaino.

Høines, M. (2000). Matematik som språk. Verksamhetsteoretiska perspektiv. Kristianstad: Liber AB.

Joutsenlahti, J. (2003). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa Virta, A. & Marttila, O. (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003. Turku: Turun opettajankoulutuslaitos. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja B:72, 188-196.

Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. Tampere: Acta Universitatis Tamperensis 1061.

Joutsenlahti, J. 2009. Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työssä. Teoksessa Raimo Kaasila (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008. Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9. Rovaniemi: Lapin yliopisto, 71-86.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2010). Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa Ropo, E. Silfverberg, H. & Soini, T. (toim.) Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009. Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja A 31. Tampere: Tampereen yliopisto, 77–90.

Joutsenlahti, J. (2010). Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa Asikainen, M.,Hirvonen, P. & Sormunen, K. (toim.) Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa, Matematiikan opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009. Joensuu: Itä-Suomen Yliopisto, 3-15.

Juuti, K. (2005). Towards primary school physics teaching and learning: Design research approach. Helsinki: Helsingin yliopiston soveltavan kasvatustieteen laitos.

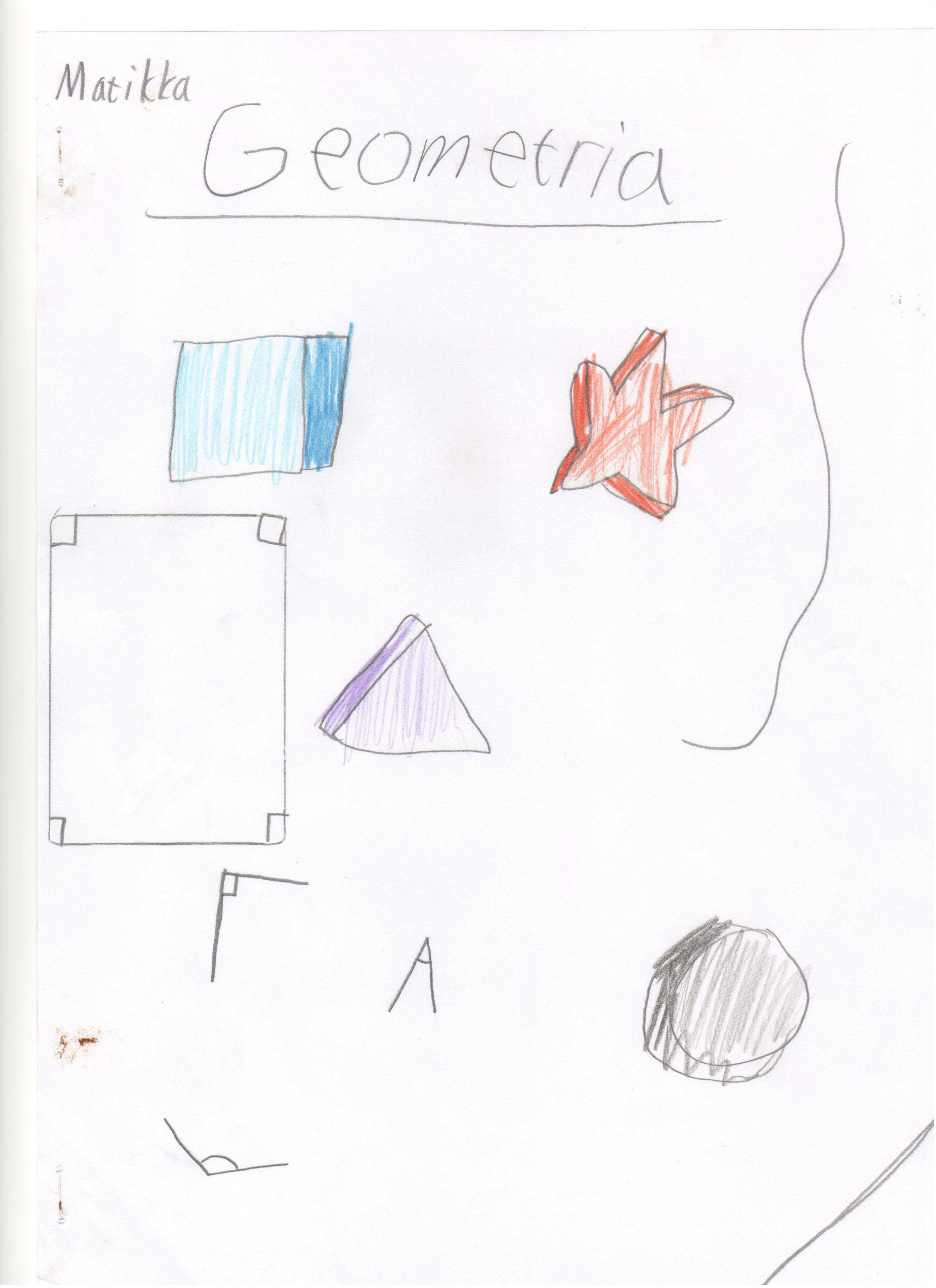
Laarni, J. Kalakoski, V. & Saariluoma, P. (2001). Ihmisen tiedonkäsittely. Teoksessa Saariluoma, P.

(toim.) Moderni kognitiotiede. Helsinki: Gaudeamus, 85-127.
Laine, M. Bamberg, J & Jokinen, P. (toim.) Tapaustutkimuksen taito. Helsinki: Gaudeamus.
Leppäaho, H. (2007). Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Jyväskylä: Yliopistopaino.
Linnansaari, H. (2004). Toimintatutkimus – tutkimus muutoksen palveluksessa. Teoksessa Kansanen, P. & Uusikylä, K. (toim.) Opetuksen tutkimuksen monet menetelmät. Jyväskylä: PS-kustannus. 113-131.
Metsämuuronen, J. (toim.) (2006). Laadullisen tutkimuksen käsikirja. Helsinki: International Methelp.
Opetushallitus (2004). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Vammala: Vammalan Kirjapaino Oy.
Piaget, J. & Inhälder, B. (1977). Lapsen psykologia. Ranskankielinen alkuteos La Psycholigie de l'Enfant. Suomentaja Rutanen, M. Jyväskylä: Gummerus.
Rauste-von Wright, M. & von Wright, J. (1994). Oppiminen ja koulutus. Helsinki: WSOY.
Silfverberg, H. (1999). Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Vammala: Vammalan kirjapaino oy.
Sternberg, R. (1996). What is mathematical thinking? Teoksessa Sternberg, R. & Ben-Zeev, T. (toim.) The nature of mathematical thinking. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 303-318.
Tikkanen, P. (2008). ”Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin” Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten kokemana. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 337. Jyväskylä: Jyväskylä University Printing House. 102-105.
Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2002). Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Helsinki: Tammi.
Vygotski, L. (1982). Ajattelu ja kieli. Venäjänkielinen alkuteos 1931. Suomentajat Helkama, K. & Koski-Jännes, A. Espoo: Weilin + Göös.
Väisälä, K. (1959). Geometria. 5. painos. Helsinki: WSOY.
Wang, F. & Hannafin, M. J. (2005). Design-based research and technology- enhanced learning environments. Educational technology research and development, 53 (4), 5–23. Georgia: Laboratory at The University of Georgia.
Wood, T. & Berry, B. (2003). Editorial: What does “Design Research” offer mathematics teacher education? Journal of Mathematics Teacher Education 6, 195–199. Netherlands: Springer.

LIITTEET

Liite 1: Oppilaan tuottama geometrian vihko

Liite 2: Opetusmateriaali



Liite 1

Sisällysluettelo:

1. Piste
2. KT Yhdistä pisteet
3. Labyrintti
4. Viiva
5. Suora
6. KT Kuinkamontasuoraa?
7. Jana, puolisuora ja murtoviiva
8. KT Piirrä pisteidenvälille
9. Spaghetti
10. KT moniste (jana, puolisuora, murtoviiva)
11. Taso
12. Harppi harjoitus
13. Angry Birds
14. Ympyrä, ympyräviiva ja säde
15. KT Etsi kotoa
16. Kulmat
17. Monikulmio, nelikulmio ja kolmio
18. Neliö
19. KT Liimaa kulmat
20. Suorak

Liite 1

Piste

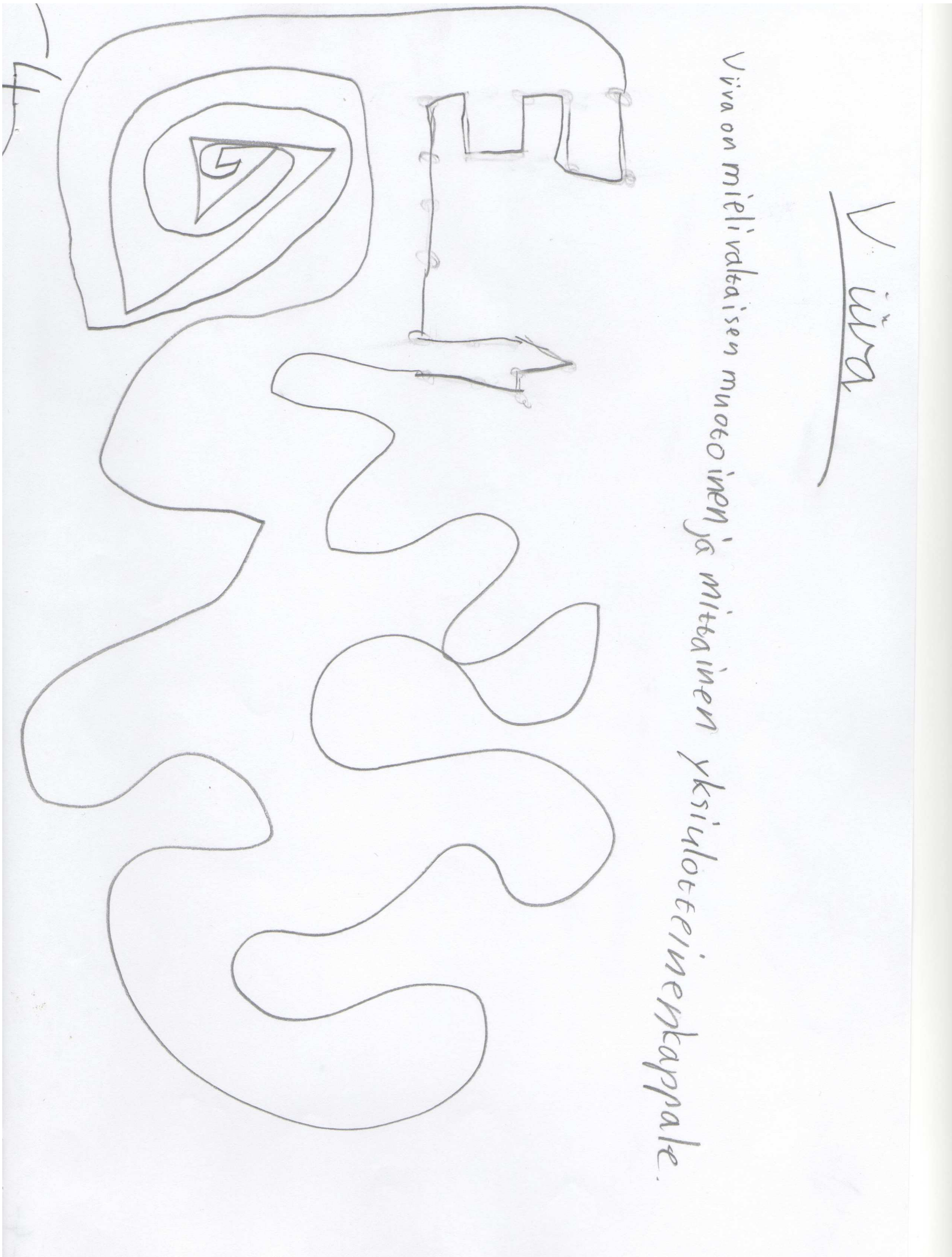
Piste on ääretömänpieni.
Piste on geometsian perusyksikkö.
Piste on merkitään X
Piste nimetään isolla kirjaimella.

KT

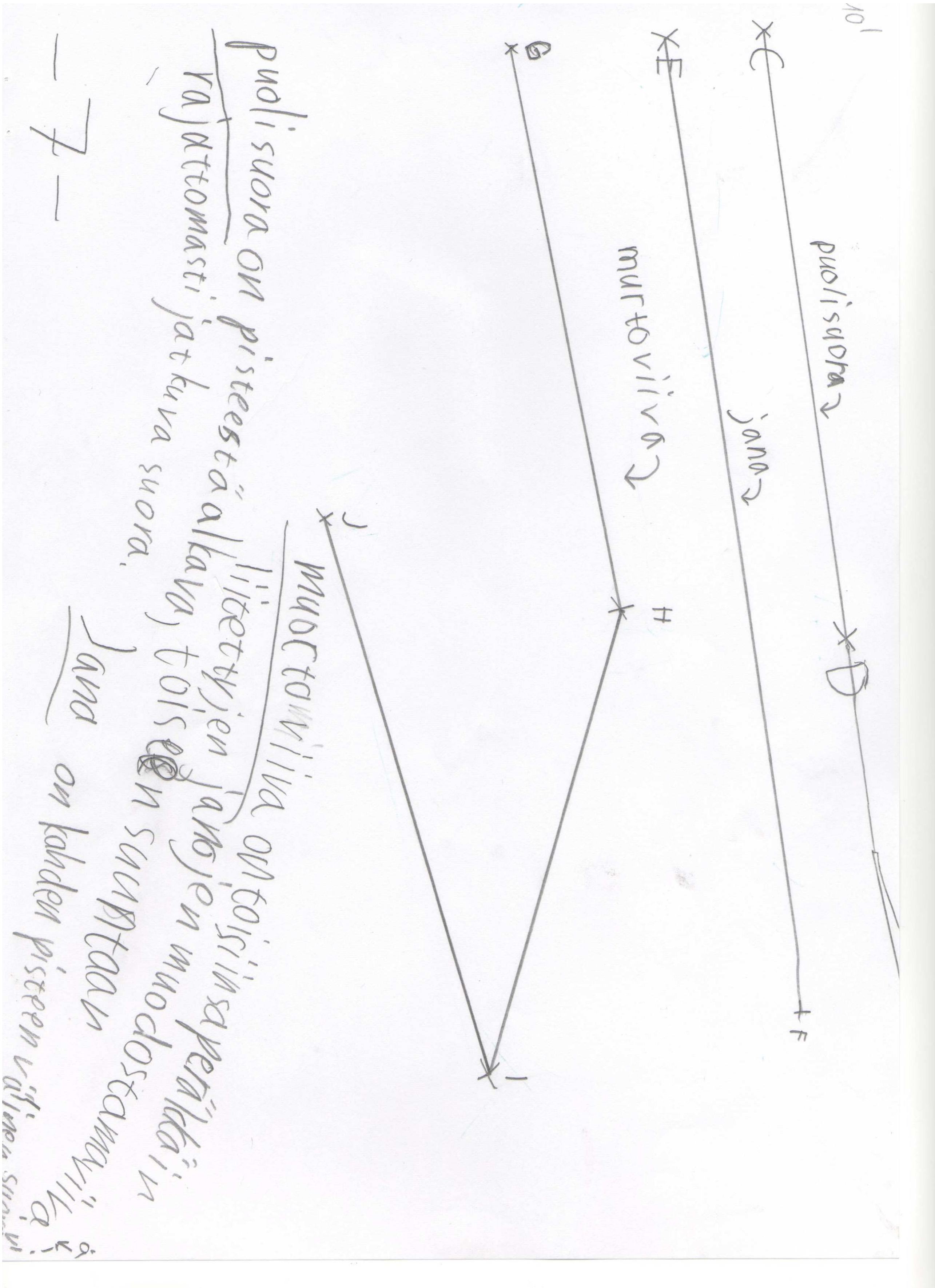
Piirrä puhtaalle paperille 25 pistettä, niinettä pisteitä on jokapuolella

×A

Liite 1


Viiva
Viiva on mielivaltaisen muotoinen ja mittainen yksiulotteinen kappale.

Liite 1


10'
puolisuora
C
D
jana
E
F
murtoviiva
G
H
I
J
muortomiiva on toisiinsa peräkkäin liitettyjen janojen muodostama viiva.
puolisuora on pisteestä alkava, toiseen suuntaan rajattomasti jatkuva suora.
Jana on kahden pisteen välinen
— 7 —

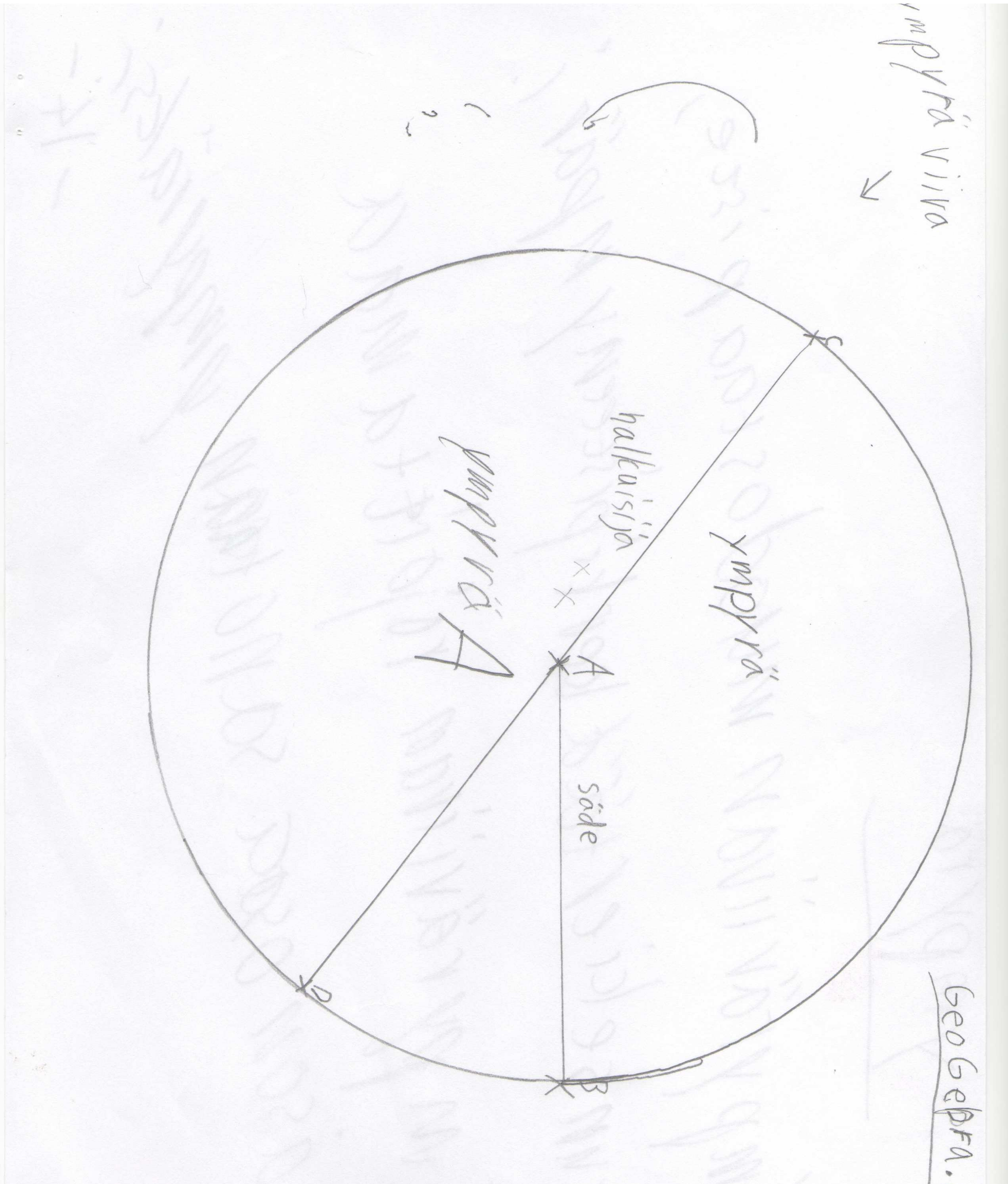
Liite 1


SULJETTU MURTOVIIVA
LFESGL
AVOIN MURTO-VIIVA
CIT
Lumikki
-9-

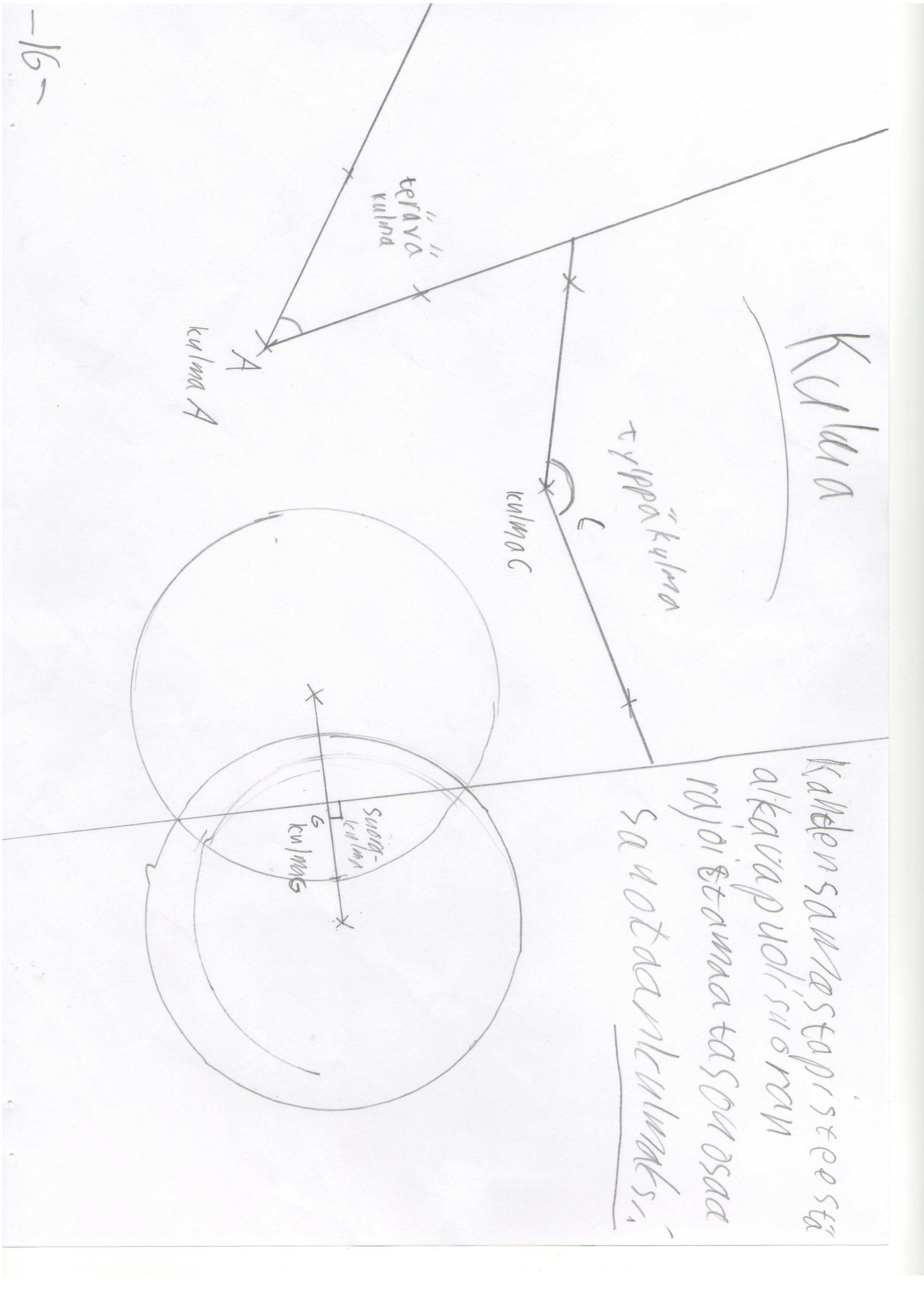
Liite 1

Taso

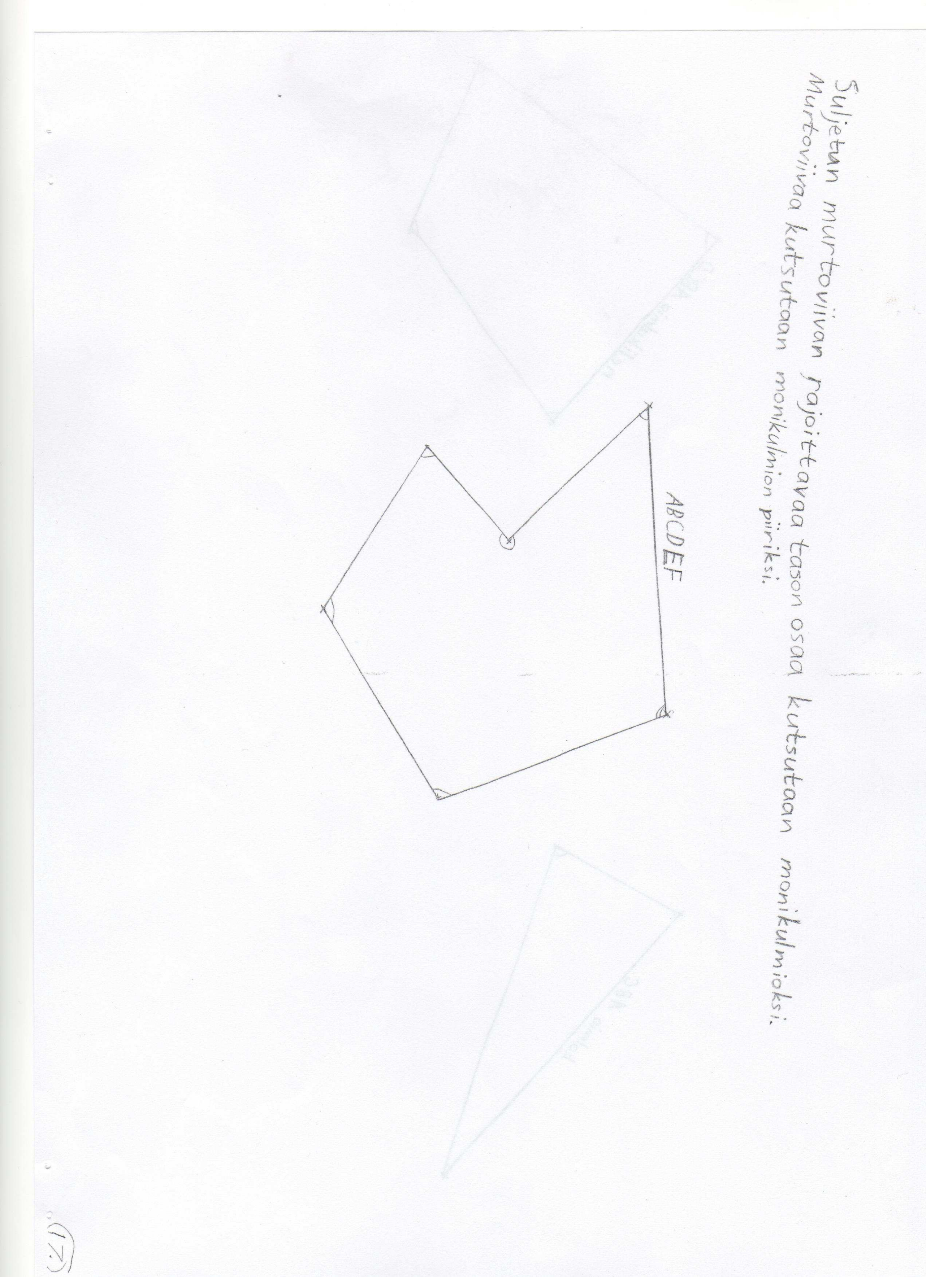
Kaikiiniin suuntiin rajattomasti jatkkuvaa tasaista pintaa sanotaan tasoksi. Kolmen pisteen kautta, jotka eivät ole samalla suoralla, voidaan piirtää vain yksi taso.



Liite 1


-16-
Kulma
Kahden samasta pisteestä alkavan puolisuoran rajoittamaa tasonosaa sanotaan kulmaksi.
terävä kulma
A
kulma A
tylppä kulma
C
kulma C
suora kulma
G
kulma G

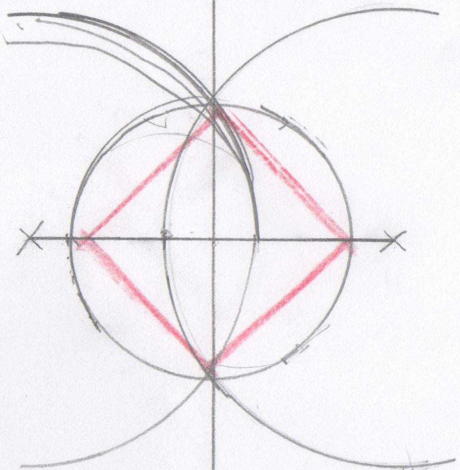
Liite 1



Suljetun murtoviivan rajoittavaa tason osaa kutsutaan monikulmioksi.
Murtoviivaa kutsutaan monikulmion piiriksi.

Liite 1

Neliö



Nelikulmiota jonka kaikki sivut ovat yhtäpitkiä ja kaikki kulmat suoria, sanotaan neliö.

Liite 1

Tuottamamme materiaali on sellaisenaan soveltuva käytettäväksi alakoulun opetuksessa. Vaikka jakso toteutettiin toisella vuosiluokalla, materiaali soveltuu laajuutensa vuoksi käytännössä mille tahansa vuosiluokalle käsitejärjestelmän hallinnan syventämiseen, ylemmillä vuosiluokalla toki ikätasoon soveltaen. Jakson toteuttaminen ei vaadi opettajaa käymään tutkimustamme kokonaisuudessaan läpi, mutta lukuihin 5.1, 5.2 sekä liitteisiin olisi hyvä tutustua. Materiaalia on tietyiltä osin muokattu opetusjakson toteutuksen ja tutkimusaineiston analyysin aikana havaittujen seikkojen vuoksi.

Jakso etenee järjestelmällisesti käsite kerrallaan, jokaiseen käsitteeseen sisältyy teoreettinen määrittely, käsitteen konstruointi harjoitukset, joista oppilaat valmistavat oman vihkonsa/kansionsa/portfolionsa opettavan opettajan mieltymyksistä sekä käytännön tarpeista riippuen, sekä syventäviä ja toiminnallisia harjoituksia joita voi toteuttaa tarpeiden mukaan käytettävissä olevan ajan puitteissa. Portfoliosivuun tulisi sisältyä ainakin käsitteen määritelmä ja kuva, ikätasosta ja ryhmän kirjallisesta taidosta riippuen myös nimeämisperusteet tai muuta harkinnan varaisesti tärkeää voidaan kirjata. Käsitekokonaisuuksia ei ole suoraan sidottu oppitunneiksi, oppitunnit koostetaan materiaalista tarpeen mukaan.

Opettajan kannattaa tutustua materiaaliin huolella ennen jakson toteuttamista. Harjoitukset ovat pääasiassa itsessään eriyttäviä, alaspäin eriyttämistä voi toteuttaa opettajan oman harkinnan mukaan esimerkiksi karsimalla opetussuunnitelman ulkopuolelle jääviä käsitteitä. Jokaisen tunnin alussa tulisi kerrata jo opitut käsitteet joko suullisesti tai muulla soveltuvalla tavalla ja sitten tutustua uuteen käsitteeseen jo osattujen avulla.

Kursivoidut käsitteenmäärittelyt ovat sanatarkasti K. Väisälän teoksesta Geometria vuodelta 1959. Oppilaiden muistiinpanoihin tulevat selkokielistetyt käsitteenmäärittelyt on alleviivattu, jos oppilaiden muistiinpano on suoraan Väisälältä, on teksti sekä *alleviivattu että kursivoitu*.

Jakson aikana tarvitaan tyypilliset työvälineet lyijykynä, kumi, viivain sekä ympyrän osuudella myös harppi. Oppilaille tulee säännöllisesti painottaa geometrisen piirtämisen tarkkuutta, lyijykynän tulee olla terävä ja kumia käytettäessä tulee toimia sotkematta. Jokaista uutta vihon sivua kohden tarvitaan myös A4-arkki, joko täysin tyhjä, tai kirjoittamisen helpottamiseksi muutamalla kirjoitusrivillä varustettu. Piirustustilaa tulee olla runsaasti ja suttupaperi harjoittelua varten on myös suositeltava.

Esimerkki oppilaan portfolion pääkohdista löytyy tutkimuksestamme liitteenä 1.

Piste

Geometriset pisteet ajatellaan "äärettömän pieniksi". Niitä kuvataan havainnollisesti tavallisella pisteellä, pienellä renkaalla tai ristillä.

Piste on äärettömän pieni. Piste merkitään havainnollisesti (x).

Oppilaille tulee painottaa, että pisteet ovat niin pieniä että niitä ei voi piirtää näkyville, mutta ne pitää voida merkata käytännön työskentelyn vuoksi. Piste on pienempi kuin lyijykynän tai neulan kärki – tätä ei voi painottaa liikaa, oppilaille jää todella helposti käsitys että piste on nimenomaan lyijykynän kärjen kokoinen.

Ajateltaessa piste lyijykynän kärkeen, huomataan asetettaessa pisteitä peräkkäin vetämällä kynää pitkin paperia (lue: piirtämällä) syntyvän viiva. Piirrettäessä viivat ristiin, viivat risteävät täsmälleen yhden pisteen kohdalla. Koetetaan pyyhkiä kaikki lyijykynän jälki muualta paitsi tuosta yhdestä pisteestä. Tämä on käytännössä mahdotonta, todetaan että piste merkitään pienellä ristillä ja merkitty piste sijaitsee tässä erittäin lyhyiden viivojen risteyskohdassa.

Opetetaan pisteen nimeäminen yhdellä suuraakkosella ja tehdään portfoliosivu, tässä yhteydessä myös portfolion sisällysluettelon tekeminen ja sivujen numerointi on hyvä aloittaa. Myös kansilehden voi haluttaessa aloittaa nyt. Hauska tapa tehdä kansilehti on piirtää jokaisen tunnin lopuksi kansilehteen opittu käsite pirteän värisellä värikynällä.

Viiva

Geometriset viivat ajatellaan äärettömän ohuiksi. Viivaa voidaan pitää äärettömän tiheässä olevien peräkkäisten pisteiden muodostamana.

<u>Viiva on mielivaltaisen muotoinen ja mittainen yksiulotteinen kappale.</u>

Viivan opetetaan geometrisena käsitteenä, muodostetaan yläkäsite suoralle ja seuraaville käsitteille. Ei tyypillisesti käsitellä geometrian opetuksessa, mutta sisällytimme käsitteen opetusjaksoon aukottomuuden vuoksi.

Labyrinttikilpailu: Piirretään niin suuri spiraali kuin A4-arkille mahtuu, lähdetään keskeltä takaisin ja taas uudestaan, kunnes piirrosviiva osuu labyrintin seinään. Kuka saa useimman kierroksen?

Klassinen ruutujäljennöstehtävä: Piirretään ruutupaperille kuva. Pari jäljentää kuvan ruutuja apuna käyttäen.

Pisteistä viiva, viivasta kuva: Piirrä paperille satunnaisiin paikkoihin 25 pistettä oikeaoppisesti merkattuna. Pisteet yhdistetään ja niistä muodostetaan kuvio sekä väritetään kuvio. Avoin ja useimmille mieleinen mielikuvittelutehtävä.

Kaksi jälkimmäistä soveltuvat hyvin kotitehtäväksi jakamalla ne kahteen osaan. Kotitehtävän toisen osan tekeminen seuraavalla tunnilla sitoo kokonaisuuksia.

Suora

<u>Suora on kahden pisteen kautta molempiin suuntiin rajattomasti jatkuva suora viiva.</u>

Asetellaan naru luokkaan niin, että se kulkee useiden oppilaiden kautta kulmasta kulmaan. Pohditaan, mikä on lyhin matka kulmasta kulmaan – suora. Kuinka monta oppilasta tarvitaan, että naru saadaan suoraksi? Todetaan, että lyhin kahden pisteen välinen matka on suora. Oppilaat kokeilevat paperille kahdella pisteellä. Mikä apuväline tarvitaan, jotta voidaan piirtää suora? Harjoitellaan suoran piirtämistä viivaimella niin, että oppilaat onnistuvat piirtämään suoran aina osumaan määrääviin pisteisiin. Tämä voi vaatia hieman harjaantumista. Huomioitava leveä ote viivaimen tukemisessa apukädellä.

Kun suora kuvitellaan jatkuvaksi äärettömiin, on kyseessä geometrinen suora. Liitutaulua käytettäessä esimerkki, jossa opettaja piirtää suoran jatkumaan seinille liitutaululta yli, jää hyvin oppilaiden mieliin. Painotetaan, että suoran on molemmista päistään tultava pisteiden yli täyttääkseen suoran määritelmän.

Opetellaan nimeämään suora sen määräävien pisteiden avulla ja tehdään portfoliosivu – haluttaessa voidaan myös puolisuora ja jana kirjata samalle portfoliosivulle.

Tehtävä:

Kuinka monta suoraa: Piirrä paperille kolme pistettä mielivaltaisiin kohtiin. Kuinka monta suoraa voit näiden avulla piirtää? Kuinka monta suoraa voit piirtää neljän pisteen avulla? Keksiikö joku kuinka monen uuden suoran piirtämisen piste lisää mahdollistaa? Tämä tehtävä soveltuu mainiosti kotitehtäväksi, ja tarkistus on hyvä toteuttaa oppilaan esittämänä esimerkiksi dokumenttikameran avulla. Tehtävä on haastava pähkinä, alakoulun mille tahansa luokka-asteelle säännön keksiminen suorien määrälle suhteessa pisteiden määrään on huomattavan vaikeaa.

Jana ja puolisuora

Pisteestä alkavaa, toiseen suuntaan rajattomasti jatkuvaa suoraa viivaa sanotaan puolisuoraksi.

Kahden pisteen välistä suoraa viivaa sanotaan janaksi.

Piirrettään paperille kaksi pistettä ja nimetään ne. Keskustellaan, onko suoralla alku tai loppupistettä – ei ole, mutta voimmeko tehdä sellaisen suoran jolla olisi? Miten tällaiset piirretään? Harjoitellaan piirtämään niin, että suora selkeästi alkaa toisesta pisteestä mutta jatkuu toisen yli. Seuraavaksi sama, mutta myös lopetetaan viiva pisteeseen. Nimetään syntyneet kuviot ja opetellaan niiden nimeäminen pisteiden perusteella. Tulee huomioida, että puolisuoran tapauksessa on ehdottoman tärkeä muistaa nimettäessä sijoittaa alkupiste ensimmäiseksi.

Kaupunkisiluettitehtävä: Pari piirtää 25 pistettä paperille kuten pisteistä viiva-tehtävässä. Toisen parista tulee yhdistää pisteet janoilla huolellisesti viivainta käyttäen. Viimeistellään kaupunkisiluetiksi.

Piirrä ohjeen mukaan: Tehtävään voi keksiä loputtoman määrän variaatioita, opettaja voi olla tehnyt valmiit pisteet monisteeseen, joita käyttäen tulee kirjallisten tai suullisten ohjeiden mukaan piirtää erilaisia janoja, puolisuoria ja suoria. Myös pari voi keksiä ohjeita, kuvia voidaan täydentää taideteoksiksi tms.

Murtoviiva

Murtoviiva on peräkkäisistä janoista muodostuva mielivaltaisen muotoinen kappale.

Jaksossa murtoviivan käsitteeseen käytetään kohtuullisesti aikaa, vaikka murtoviiva yksin ei ole periaatteessa erityisen merkityksellinen geometrian käsite. Perusteena käsitteen kohtuullisen laajalle tarkastelulle jaksossa on sen integroituminen kiinteästi monikulmion käsitteeseen, ja tavoite ymmärtää monikulmio syvemmin käsitteenä kuin satunnaisena kuviona.

Aiempien käsitteiden kertaamiseen ja työmuotojen vaihteluun on seuraava tehtävä soveltuva murtoviivan opetukseen, käytännöllistä on aloittaa murtoviivan opetus sillä ja tehdä portfoliosivu askartelun lopputuotoksesta. Harjoitukseen tarvitaan keittämättömiä spagetteja sekä askarteluliimaa, haluttaessa myös jotkin pienenpienet ötökkäfiguurit tuovat väriä opetukseen.

Tehtävä:

Jokaiselle oppilaalle jaetaan yksi spagetti. Suullisesti kyselemällä käydään läpi, mikä muoto(suora), mutta löytyy sekä alku- että päätepisteet, eli mikä geometrian kappale (jana). Muistetaan todeta, että geometrian käsitteenä janalla ei tietenkään ole oikeasti paksuutta, mutta käytännön askartelun kannalta on syytä olla. Sitten opetellaan uutta: Katkaise spagetti – mitä kappaleita nyt sait? Kuvitellaan että murtumakohdan piste pysyy samassa, katkaistaan vielä pari kertaa (syytä huomauttaa, että ei pilkota spagettia ihan murusiksi) ja liimataan palat paperille. Kerrataan janan nimeäminen, ja pohditaan miten voisimme nimetä nyt syntyneen kuvion (murtoviiva A, B, C, D...). Tässä kohdassa on hyvä kirjoittaa murtoviivan määritelmä ja nimeäminen askartelun tuotoksen yhteyteen. Otetaan toinen spagetti ja toimitaan kuten edellä, mutta ei liimata paperiin heti. Tässä kohdassa mukaan hyppää ötökkä, joko figuuri, tarra, tai mielikuviteltu. Mitä murtoviivalle pitää tehdä jotta otus ei pääse karkuun? Pohditaan asiaa, lopputulos on, että se pitää sulkea. Kun ötökkä on saatu kiinni murtoviivan sisälle, liimataan tuotos paperille. Mietitään kuviolle nimeä, päädytään suljettuun murtoviivaan. Opetellaan suljetun murtoviivan nimeäminen (viiden kulman tapauksessa A, B, C, D, E, A, eli alku ja päätepiste tietenkin sama). Viimeistellään portfoliosivu ja jätetään liimaukset kuivumaan.

Murtoviivojen nimeämistehtävä:

Tehtävä sopii tehtäväksi luokassa, tai seuraavan tehtävän kanssa ulkona/liikuntasalissa. Tarvitaan pitkä naru. Oppilaat hajaantuvat tilaan ja ovat pisteitä. Naru kulkee oppilaiden kautta, nimetään murtoviiva oppilaiden alkukirjainten perusteella. Voidaan tehdä erilaisia muunnelmia. Miten muodostetaan suljettu murtoviiva?

Toiminnallinen hahmotustehtävä murtoviivan ja/tai janan kertaamiseen:

Harjoitus valmistellaan luokassa ja toteutetaan pihalla tai liikuntasalissa. Piirretään pienissä ryhmissä ruutupaperille 5-7 pistettä ja muodostetaan murtoviiva yhdistämällä nämä. Ryhmä etsii kuvin pisimmän janan, ja päättää mitkä pisteet ympäristössä vastaavat tämän janan päätepisteitä. Käytetään murtoviivaa karttana ja etsitään viivan muut pisteet ympäristöstä. Tämän jälkeen ryhmät vaihtavat karttoja ja käyvät toisten ryhmien murtoviivat läpi. Lopuksi keskustellaan minkälaisia reittejä tuli, ja yhdessä pohditaan mitkä ratkaisut vastaavat parhaiten piirrettyjä murtoviivoja.

Taso

Tason käsite ei kuulu geometrian oppisisältöön alakoulussa, mutta on monikulmioiden ja ympyrän määritelmän kannalta välttämätön tässä jaksossa. Tasoon itseensä ei perehdytä merkittävän laajasti, mutta se tulee käsitteenä tuntea. Jos ympyrä halutaan opettaa jaksossa ennen suoraa ja sen johdannaisia, on tason käsite opetettava ensin.

Tutkitaan ensin suoran ominaisuuksia luokassa tai käytävällä narun avulla pienissä ryhmissä – kuinka moneen suuntaan viivaa pitkin voi liikkua? Todetaan, että vaikka viivan asettelisi miten, liikkumissuuntia viivaan pitkin on vain eteen ja taakse, eli suoralla on vain yksi suunta jota voi liikkua. Pohditaan pisteen ulottuvuuksia, huomataan että pisteellä ei ole suuntia.

Kaikkiin suuntiin rajattomaksi ajateltua tasaista pintaa kutsutaan tasoksi. Kolmen pisteen kautta, jotka eivät ole samalla suoralla, voidaan asettaa yksi taso.

Taso voidaan havainnollistaa kymppipalikoilla tai multilinkeillä, jos ajatellaan palikan kuvaavan pistettä. Kun pisteitä asetellaan peräkkäin, alkaa muodostumaan suora. Kun suoran viereen lisätään samanlaisia suoria, alkaa muodostumaan taso. Toinen havainnollistava malli on paksu kirja – kirjan sivu ei ole ”minkään paksuinen”, mutta niitä päällekkäin latomalla syntyy taso.

Ympyrä

Haluttaessa ympyrä voidaan opettaa jaksossa vasta loppupuolella. Käsite voidaan opettaa myös heti pisteen, viivan ja tason jälkeen. Jos merkittäviä pedagogisia syitä opettaa ympyrä jossain muussa vaiheessa jaksoa kuin tässä, suosittelemme esittämäämme järjestystä –

aiemmissa käsitteissä harjoitellaan paljon tarkkaa piirtämistä, jota harpin käyttö vaatii, ja ympyrää harjoiteltaessa tulee harpin käyttö tutuksi. Harppia tarvitaan esimerkiksi suoran kulman konstruointiin. Emme jaksossa sido ympyrää ja kulmaa toisiinsa vahvasti, koska astejärjestelmän opiskelu ei kuulu sisältöihin, mutta ympyrän harjoittelu tässä vaiheessa mahdollistaa myös tämän yhteyden opettamisen.

Jaetaan spagetit ja paperit. Esitellään, miten spagetin pätkällä voidaan merkitä paperille janan alku ja loppupiste. Janat ovat aina saman pituisia, jos käytetään samaa spagetin pätkää. Voidaan ohjeistaa soveltuvalla esitysteknologialla. Annetaan oppilaille tehtäväksi piirtää yksi piste, joka nimetään esimerkiksi pisteeksi A. Spagettia avuksi käyttäen piirretään huolellisesti saman pituisten janojen päätepisteitä niin, että janan toinen piste on koko ajan tämä nimetty piste A. Havaitaan, että pisteet alkavat muodostamaan ympyräviivaa.

Ympyräviivan muodostaa piste, kun se kiertää toisen pisteen ympäri pysyen koko ajan samalla etäisyydellä siitä.

Ympyrä on ympyräviivan rajaama tason osa.

Jaetaan harpit, esitellään harpin käyttö. Harjoitellaan piirtämällä vapaasti ympyröitä, varataan aikaa työskennellä rauhassa kunnes harpin käyttö sujuu vähintään kohtuudella. Portfoliosivulle piirretään yksi suurehko ympyrä sekä piirretään ja nimetään ympyrän osat: keskipiste, kehä, säde, halkaisija. Todetaan että harpin terän ja kynän kärjen välinen pituus on sama, kuin ympyrän säde.

> **Toiminnallista ympyrän piirtämistä:** Tehtävä kannattaa toteuttaa ulkona. Annetaan oppilaille narua. Tehtävänä piirtää hiekkaan/lumeen ympyröitä käyttäen oppilaita pisteinä. Miten ympyrä on helpoin tehdä? Mikä määrää ympyrän koon? Jatkotehtävänä voidaan tutkia summittaisesti esimerkiksi askeleita mittana käyttäen, kuinka monta ympyrän halkaisijaa sen kehälle mahtuu.
>
> **Vihaiset linnut- tyyppinen harppipeli:** Oppilaat piirtävät pelistä tutun kentän kaltaisen pelikentän, jossa siis yksi piste josta ”ammutaan” ja kohteita joihin tulee osua. Pelataan parin kanssa niin, että pelaaja vuorollaan saa säätää harppiin haluamansa kärkivälin, asettaa harpin piikin haluamaansa pisteeseen ja koettaa ympyräviivaa piirtämällä osua kohteeseen. Kentän piirtäminen soveltuu hyvin kotitehtäväksi.

Kulma

Kulman käsitteessä tärkeää on ymmärtää, että kulman koon määrää kulman aukeama – ei näkyville piirretyn sivun pituus. Esimerkiksi kirjaa avaamalla, pimennetyssä luokassa taskulampulla taululle tai tauluharpilla tai vastaavalla voidaan esitellä kulman aukeamista. Muistetaan siis että kulman tapauksessa enemmän auki tarkoittaa suurempaa kulmaa. Esimerkiksi geogebralla tai jollain tauluesitysohjelmalla voidaan näyttää erikokoisia kulmia ja vertailla niiden kokoja. Tärkeää olisi näyttää kulmia joiden sivuja on piirretty näkyville vain vähän ja vastaavasti kulmia joiden sivuja on piirretty esille huomattavan paljon, jotta oppilaat ymmärtäisivät verrata kulmien kokoja nimenomaan aukeamaa vertaamalla, eivät sivuja.

Suora, terävä ja tylppä kulma

Suora kulma on käsitteenä välttämätön kulmien luokittelemiseksi. Tässä yhteydessä päädyimme esittelemään suoran, terävän ja tylpän kulman. Hieman ongelmalliseksi tämän tekee se, että suora kulma tulisi määritellä täyden kulman kautta, joten tämän jakson yhteydessä emme pääse suoran kulman täsmälliseen määritelmään. ”Terävä” ja ”tylppä” ovat arkikielisiä käsitteitä, jotka geometrian käsitteinä ovat likimain samaa tarkoittavat, joten oppilaan on ne helppo ymmärtää.

Helpoin tapa esittää suora kulma on naru ja punnus – riiputettaessa punnusta narussa, on naru suorassa kulmassa suhteessa maanpintaan. Tehtävistä suoran kulman konstruoiminen harpilla ja viivaimella voidaan tehdä tässä kohdassa, mutta tehtävä on hienomotorisesti sen verran haastava, että haluttaessa opettaja voi esittää tehtävän dokumenttikameran avulla taululle ja oppilaat seuraavat, tai esimerkiksi eriyttävänä tehtävänä. Huomioi, että ei piirretä summittaisia suoria kulmia, vaan suora kulma piirretään aina niin, että se on aidosti suora!

Kahden samasta pisteestä alkavan puolisuoran rajoittamaa tason osaa sanotaan kulmaksi.

Portfoliosivuun merkitään myös kulman nimeäminen, joka tässä yhteydessä on nimetä kulma kärkipisteensä perusteella suuraakkosella, eli esim. kulma A. Kreikkalaisia aakkosia ei epäselvyyksien vuoksi tässä kohdassa opeteta. Merkitään portfoliosivuun myös kulman osat kärkipiste ja sivu.

Suoran kulman konstruoiminen harpilla ja viivaimella:
Piirretään hieman harpin kärkiväliä pidempi jana. Merkitään janan molempia päitä vuorotellen keskipisteenä käyttäen janan molemmille puolille ympyräkaaren pätkät jotka leikkaavat toisiaan. Piirretään leikkauspisteitä päätepisteinä käyttäen jana. Muodostuneet janat ovat suorassa kulmassa suhteessa toisiinsa.

Toiminnallinen kulmatehtävä:

Istutaan lattialle. Ihmetellään hyvää istuma-asentoa, nojaudutaan eteenpäin, nojaudutaan taaksepäin. Havaitaan, että suorassa kulmassa kököttäessä ei tarvita juurikaan lihasvoimaa. Voidaan hassutella ja katsoa, miten terävän tai tylpän kulman pystyy muodostamaan istumalla. Huomataan, että maan vetovoima vaikuttaa suorassa kulmassa.

Kulmien etsimistehtävä:

Etsi ympäristöstäsi (luokkahuone, oma huone, koti tms.) kulmia. Luokittele ne teräviksi, tylpiksi ja suoriksi. Tämä tehtävä soveltuu hyvin kotitehtäväksi.

Monikulmiot

Piirretään paperille kuusi pistettä satunnaisesti kohtuullisen lähelle toisiaan niin, etteivät ne ole samalla suoralla. Yhdistetään pisteet toisiinsa niin, että muodostuu suljettu murtoviiva – tässä yhteydessä hyvä kerrata suljettu murtoviiva. Montako kulmaa kuviossa on? Luokitellaan kuvion kulmat teräviin ja tylppiin kertausluontoisesti. Esitellään monikulmio ja kirjoitetaan portfolioon määritelmä. Tässä kohdassa tulee painottaa murtoviivan ja monikulmion merkitsevää eroa, murtoviiva ei sisällä tasoa, monikulmio sisältää.

Monikulmio on suljetun murtoviivan rajaama tason osa.

Lasketaan piirretyn monikulmion kulmat. Kuinka monta pistettä aluksi piirrettiin? Kuinka monta sivua tässä monikulmiossa on? Keksiikö joku, minkä niminen tämä monikulmio on (kuusikulmio)? Monikulmio nimetään siis tarkemmin kulmien, sivujen ja kärkipisteiden määrän mukaan. Jos alussa piirrettiin pisteet A, B, C, D, E ja F, kyseessä on kuusikulmio ABCDEF. Piirretään portfolioon vielä näiden tietojen pohjalta viisikulmainen, nelikulmainen ja kolmikulmainen monikulmio. Käydään vielä nimeäminen läpi – huomioitavaa on, että kolmikulmainen monikulmio on aina nimeltään kolmio, mutta nelikulmainen monikulmio on nimeltään nelikulmio, ei neliö.

Suorakulmio ja neliö

Seuraavaan havainnollistamiseen tarvitaan joko kulmamitta, tai opettajan valmiiksi tekemä suorakulman malli. Tämä voidaan toteuttaa joko esitystekniikkaa käyttäen opettajan tekemänä tai oppilaiden tutkimustehtävänä vanhemmalla, tai muuten taitavammalla oppilasryhmällä. Selvitetään siis, että kuinka monta kulmaa monikulmiossa voi olla, jos kaikki kulmat ovat suoria, ja havaitaan, että monikulmiossa voi olla neljä ja vain neljä kulmaa tässä tapauksessa. Tällaisen nelikulmion nimi on suorakulmio. Jos suorakulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, on kyseessä neliö. Vain ja ainoastaan nämä määritelmät täyttävä nelikulmio on nimeltään neliö. Suorakulmio ja neliö on mahdollista konstruoida vain harppia ja viivainta käyttäen, mutta tätä koskee samat huomiot kuin suorakulman konstruointia.

Neliön ja suorakulmion konstruoiminen harpilla ja viivaimella:
Ensin konstruoidaan yksi suora kulma aiemmin opitun mukaan, mutta piirretään suoria, eli ei lopeteta suoria janoiksi vaan jatketaan toisesta päästä summittaisesti noin janan itsensä pituuden verran yli. Huomioidaan, että harpin kärkiväli ei saa tämän jälkeen muuttua tehtävän suorittamisen aikana. Seuraava suora kulma tehdään niin, että se leikkaa äsken piirretyn apupisteen siinä päässä janaa, johon piirrettiin jatke. Toimitaan vielä kaksi kertaa kuten edellä ja neliö on valmis. Jos halutaan tehdä suorakulmio, harpin kärkiväliä muutetaan kahden kulman valmistuttua.

Kolmion ja nelikulmien kulmien summan toteamistehtävä: Jos halutaan tehtävään vähän väriä, tarvitaan erivärisiä kartonkeja tai piirustuspapereita. Piirretään näille useampia kolmioita ja neliöitä, leikataan huolellisesti irti. Revitään kulmat varovasti irti. Liimataan valkoiselle papereille niin, että kulmien kärkipisteet tulevat samaan pisteeseen ja sivut täsmällisesti vastakkain. Huomataan, että nelikulmioiden kulmat muodostavat täyden ”ympyrän” ja kolmioiden puolikkaan ”ympyrän”. Haluttaessa tässä kohdassa voidaan kertoa oikokulman ja täyden kulman käsitteet, mutta varsinainen tarkoitus on antaa oppilaille käsitys geometrian sisäisestä säännönmukaisuudesta.

Monikulmioiden etsimistehtävä: Vastaava kuin kulmien etsiminen, etsitään monikulmioita soveltuvista ympäristöistä, kirjataan ja nimetään. Soveltuu hyvin kotitehtäväksi.

Kertaaminen ja koe

Erilaiset oikein-väärin-väittämät soveltuvat tämän tyyppisen jakson kertaamiseen mainiosti, koska käsitteet ovat yksiselitteisiä. Väittämistä voi laatia erilaisia kirjallisia ja suullisia tehtäviä, rastiruutuun tyyppisen kotitehtävän tai vaikka tietokilpailun. Sanaselityspeli, jossa opitut käsitteet on kirjoitettu lapuille ja ne pitää selittää parille suullisesti on erittäin hyvä harjoitus käsitteiden kielentämiseen. Kertauksessa tärkeää on tietysti reagoida jakson aikana esiintyneisiin ongelmiin. Seuraavana vielä jakson loppukokeena käyttämämme kokeen kysymykset, josta enemmän tietoa tutkimuksestamme.

Liite 2

1. Onko väittämä oikein vai väärin? Merkitse väittämän perään O tai V

a) Suljettu murtoviiva voi muodostaa monikulmion ___
b) Suorakulmiossa on kolme kulmaa ___
c) Suora alkaa pisteestä ___
d) Pallo ei ole ympyrä ___
e) Ympyrän säteen pituus määrää ympyrän koon ___
f) Kolmio ei ole monikulmio ___

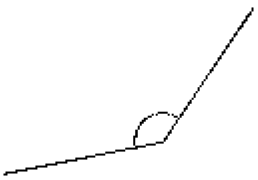
___ / 6p.

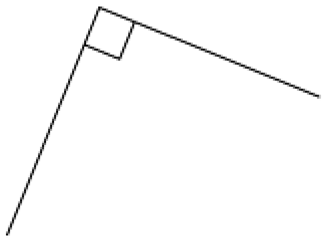
2. Yhdistä vasemmalta kaikkiin käsitteelle päteviin asioihin oikealle

a) Suorakulmio ●	● Kuviossa voi olla neljä kulmaa
b) Nelikulmio ●	● Kuviossa voi olla yli kuusi kulmaa
c) Kolmio ●	● Kuviossa vastakkaiset sivut ovat aina yhtä pitkiä
d) Monikulmio ●	● Kuviossa voi olla alle neljä kulmaa
e) Neliö ●	● Kuviossa kaikki sivut ovat aina yhtä pitkiä
f) Kuusikulmio ●	● Kuviossa on aina vain suoria kulmia

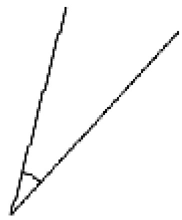
___ / 6p.

3. Minkälainen kulma?





a)



________________________ b)_______________________ c)_________________________

___ / 3p.

4. Piirrä

a) Suljettu murtoviiva ABCD A
b) Jana EF
c) Puolisuora GH
d) Suora IJ
e) Ympyrä K ja sille säde

___ / 6p

5. Kerro kaikki mitä tiedät neliöstä, esimerkiksi mitä se pitää sisällään, mihin ryhmiin se kuuluu, mikä tekee neliöstä neliön ja niin edelleen.

___ / 3p.